

**TIPO:** CURSO DE POSGRADO.

**NOMBRE:** TEORÍA GENERAL DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

**VIGENCIA:** Primer Cuatrimestre, 2019.

**DOCENTES RESPONSABLES:** Dr. Ing. Sergio Preidikman y Dr. Ing. Bruno A. Roccia  
Oficina 109; Departamento de Estructuras; Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales; Universidad Nacional de Córdoba; TE: (0351) 433-4145 Interno 35;  
e-mails: [spredikman@unc.edu.ar](mailto:spredikman@unc.edu.ar) y [bruno.roccia@gmail.com](mailto:bruno.roccia@gmail.com)

**PROFESIONALES A LOS QUE ESTÁ ORIENTADO:** Ingenieros Mecánicos, Aeronáuticos, Civiles, Electromecánicos, Electricistas, y Químicos. Licenciados en Matemática, Física y Química. Todo aquel profesional interesado en el Método de los Elementos Finitos y que satisfaga los requisitos descriptos en el ítem "PRE-REQUISITOS".

**PRE-REQUISITOS:** Tener conocimientos, a nivel de carrera de grado, en: Álgebra Lineal, Cálculo de Varias Variables, Métodos Numéricos, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales. Es recomendable tener experiencia previa en programación utilizando MATLAB®. Se entiende que lo que se presenta como "recomendable" no es excluyente. Sin embargo, el postulante que no posea esta experiencia previa deberá realizar un esfuerzo adicional, habida cuenta de la íntima relación con la temática de la asignatura. La aceptación de aquellos postulantes que no satisfagan alguna de las condiciones citadas anteriormente, quedará a criterio de los docentes responsables del dictado de la asignatura, previa evaluación de los antecedentes del postulante.

**JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS:** Con el advenimiento de la computadora digital, los métodos numéricos se han convertido en una herramienta esencial para el científico moderno ya que permiten resolver casos que hasta hace muy poco tiempo eran prácticamente imposibles de resolver por métodos matemáticos tradicionales. Esta asignatura prepara al estudiante con las herramientas necesarias para resolver problemas que constituyen el estado del arte en las áreas de la física y la matemática aplicada, mecánica de los fluidos, transferencia de calor, termodinámica, mecánica estructural y electromagnetismo. Habiendo completado exitosamente la asignatura, el estudiante se habrá familiarizado con los conceptos fundamentales que conllevaron al desarrollo del Método de los Elementos Finitos. Además, contará con las herramientas teóricas y computacionales necesarias para programar el método y/o utilizar "software" de origen comercial.

Este curso introductorio al método de los elementos finitos, de un semestre de duración, sirve a dos propósitos:

- Como asignatura de postgrado para estudiantes en ciencias e ingeniería que necesitan utilizar el Método de los Elementos Finitos y/o software "enlatado" en sus investigaciones. Se trata de un curso fundamental o básico para un programa de postgrado interdisciplinario.
- Como asignatura de postgrado básico para estudiantes en ciencias e ingeniería que pretenden especializarse en el Método de los Elementos Finitos.

**DURACIÓN Y ORGANIZACIÓN:** 60 horas. Un total de 15 semanas de clases.

El total del tiempo se dedicará a clases teórico-prácticas, las que se desarrollarán en aula. El presente curso no requiere de trabajos de campo, gabinete o laboratorio, visitas o viajes de estudio.

Lugar de Clases: a confirmar.

Horario: miércoles de 14:00 a 18:00 hs.

Fecha de inicio: 6 de marzo de 2019.

Fecha de finalización: 12 de junio de 2019.

**METODOLOGÍA DE DICTADO:** Se dictará una clase teórica semanal de 4 (cuatro) horas de duración. La misma se desarrollará en aula, con exposición oral, uso de pizarrón y de proyector multimedia.

Se fijarán horarios de consulta, fuera del horario de clases, de acuerdo a las posibilidades de los docentes responsables de la asignatura y de los estudiantes inscriptos.

**METODOLOGÍA DE EVALUACIÓN Y APROBACIÓN:**

La evaluación se realizará mediante: *i)* la presentación de trabajos prácticos, *ii)* la confección de dos programas de computadora (acompañados de respectivos informes) que servirán para implementar los conocimientos adquiridos en el curso, y *iii)* un examen final integrador.

El examen será resuelto en forma individual durante horario de clases.

Todos los trabajos prácticos, proyectos de computadora e informes deberán ser realizados de manera individual por cada estudiante. Cada trabajo práctico deberá ser entregado en la fecha estipulada por el docente. No se aceptarán trabajos prácticos tardíos.

La nota final se calculará de la siguiente manera:

- Trabajos prácticos: 35% de la nota final.
- Informe que acompaña el primer programa de computadora = 20% de la nota final.
- Informe que acompaña al segundo programa de computadora = 20% de la nota final.
- Examen final integrador = 25% de la nota final.

La asistencia a clases no es un requisito para aprobar el curso, aunque la misma es altamente recomendada.

**NECESIDADES DE INFRAESTRUCTURA:** Disponibilidad de un aula con pizarra y proyector multimedia.

**PROGRAMA ANALÍTICO RESUMIDO:**

1. Introducción
2. Problemas elípticos uni-dimensionales
3. Problemas elípticos bi-dimensionales
4. Polinomios continuos por tramos y el método de los elementos finitos
5. Convergencia y errores asociados al método de los elementos finitos
6. Integración numérica, estructuras de datos, e implementación computacional
7. Solución de las ecuaciones del método de los elementos finitos

**PROGRAMA ANALÍTICO DESARROLLADO:**

**Parte I – INTRODUCCIÓN**

Comentarios generales

Conceptos Básicos sobre el Método de los Elementos Finitos (FEM)

Necesidad de las formulaciones integrales y de soluciones débiles

Algunos conceptos matemáticos y formalismos: problemas de valores iniciales (IVP), problemas de valores en las fronteras (BVP), problemas de autovalores (EP), condiciones de borde Naturales (NBC) y condiciones de borde Esenciales (EBC)

Integrales ponderadas

Ejemplos y solución de problemas

### **Parte II – PROBLEMAS ELÍPTICOS UNI-DIMENSIONALES**

PROBLEMAS DE VALORES EN LAS FRONTERAS DE SEGUNDO ORDEN

Pasos básicos para el análisis mediante el Método de los Elementos Finitos

Formulación débil de un problema modelo unidimensional

Formulación de Galerkin de un problema modelo unidimensional

Discretización del dominio, Derivación de las ecuaciones para cada elemento, Conectividad entre elementos, Imposición de las condiciones de borde, Solución de las ecuaciones, Post-procesamiento de la solución

Aplicaciones: Transferencia de calor, Mecánica de los fluidos, y Mecánica de sólidos

Ejemplos y solución de problemas

PROBLEMAS DE VALORES EN LAS FRONTERAS DE CUARTO ORDEN

Flexión de vigas como ejemplo de un BVP de cuarto orden

Elemento basado en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli; Ecuaciones gobernantes

Discretización del dominio, Derivación de las ecuaciones para cada elemento, Ensamble de las ecuaciones, Imposición de las condiciones de borde, Solución de las ecuaciones, y Post-procesamiento de la solución

Ejemplos y solución de problemas

### **Parte III – PROBLEMAS ELÍPTICOS BI-DIMENSIONALES**

Repaso de algunas fórmulas de cálculo vectorial

Problemas de valores en las fronteras

Modelado de problemas bi-dimensionales

La ecuación de Poisson: formulación débil

Discretización mediante el FEM: El modelo de Elementos Finitos, Funciones de interpolación, Evaluación de las matrices de cada elemento, Ensamble de las ecuaciones, Post-procesamiento de los resultados

Algunos comentarios sobre generación de mallas e imposición de las condiciones de borde: Discretización del dominio, Generación automática de los datos, Imposición de las condiciones de borde

Aplicaciones: Transferencia de calor, Mecánica de los fluidos, y Mecánica de sólidos

Ejemplos y solución de problemas

### **Parte IV – POLINOMIOS CONTINUOS POR TRAMOS Y EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

Funciones continuas por tramos definidas en mallas con elementos triangulares

Elementos Lagrangenianos cuadráticos triangulares

Elementos Lagrangenianos cúbicos triangulares

Elementos Lagrangenianos de orden arbitrario triangulares

Otros elementos: rectángulos, cuadriláteros, y Serendípitos

Elementos Isoparamétricos; “Librerías” de elementos y funciones de interpolación

Ejemplos y solución de problemas

### **Parte V – CONVERGENCIA Y ERRORES ASOCIADOS AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

Aproximación de funciones suaves mediante funciones continuas por tramos

El refinamiento “estándar” de una triangulación

Familia de triangulaciones “No-degeneradas”

Aproximación mediante funciones lineales continuas por tramos

Aproximación mediante polinomios continuos por tramos

Medidas de error: Convergencia de la solución en el sentido de la “norma energética” y Convergencia de la solución en el sentido de la norma  $L^2$

Ejemplos y solución de problemas

### **Parte VI – INTEGRACIÓN NUMÉRICA, ESTRUCTURAS DE DATOS, E IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL**

Formulaciones Isoparamétricas e Integración Numérica

Coordenadas naturales

Aproximación de la geometría

Formulación Subparamétrica, Isoparamétrica, y Superparamétrica

Integración numérica: Transformación de coordenadas, Integración sobre un elemento “maestro”

rectangular, e Integración sobre un elemento “maestro” triangular; Cuadratura de Gauss sobre elementos triangulares y rectangulares

Implementación computacional; Ensamblaje de la matriz de rigidez; Ensamblaje del vector de cargas: condiciones de borde esenciales y naturales no-homogéneas

Estructura de datos de la malla: lista de nudos, lista de bordes, lista de grados de libertad, y lista de elementos; La matriz de conectividades

Implementación en MATLAB

### **Parte VII – SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

Métodos directos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales “sparse”

La factorización de Cholesky para matrices definidas positivas; La factorización de Cholesky para matrices densas; La factorización de Cholesky para matrices con estructura de banda

Factorización general para matrices “sparse”

Métodos iterativos: Gradientes conjugados (CG)

El método CG; El algoritmo CG; Convergencia del algoritmo CG

Bases “jerárquicas” para espacios de elementos finitos; Bases “jerárquicas” para triángulos Lagrangeanos lineales; Relación entre las matrices de rigidez correspondientes a bases “jerárquicas” y a bases “nodales”;

Bases “jerárquicas” y el método CG

El método CG preconditionado; Implementación utilizando MATLAB; Ejercicios

Métodos iterativos clásicos: Jacobi, Gauss-Seidel, SOR, SOR-simétrico, y CG con preconditionamiento SSOR;

Implementación utilizando MATLAB; Ejercicios

Método “Multigrid”; Iteraciones estacionarias como suavizadores; Algoritmo de corrección; El método “multigrid V-cycle”, “W-cycles”, y “ $\mu$ -cycles”; Método “full multigrid”; Implementación utilizando MATLAB;

Ejercicios

### **BIBLIOGRAFÍA:**

1. R. C. Batra, *An Introduction to the Finite Element Method*, Class Notes, ESM 5734, Department of Engineering Science & Mechanics, Virginia Polytechnic Institute & State University, 2009.
2. T. J. R. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
3. M. S. Gockenbach, *Understanding and Implementing the Finite Element Method*, Society for Industrial & Applied Mathematics, Philadelphia, 2006.
4. P. I. Kattan, *MATLAB Guide to Finite Elements: An Interactive Approach – 2<sup>nd</sup> Edition*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

**REFERENCIAS PARA LECTURA ADICIONAL:**

1. M. Ainsworth and J. T. Oden, *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000.
2. J. E. Akin, *Finite Element Analysis with Error Estimators: An Introduction to the FEM and Adaptive Error Analysis for Engineering Students*, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.
3. I. Babuska, *Finite Elements: An Introduction to the Method and Error Estimation*, Oxford University Press, 2010.
4. K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
5. T. Belytschko and J. Fish, *First Course in Finite Elements*, John Wiley & Sons, Incorporated, New York, 2007.
6. T. Belytschko, W. K. Liu, B. Moran, and K. Elkhodary, *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures – 2th Edition*, John Wiley and Sons Inc., New York, 2014.
7. W. B. Bickford, *A First Course in the Finite Element Method*, IRWIN, 1990.
8. D. Braess, *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Elasticity Theory – 3rd Edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
9. G. Dasgupta, *Finite Element Concepts: A Closed-Form Algebraic Development*, Springer Science, New York, 2018. ISBN: 978-1-4939-7421-4. DOI: [10.1007/978-1-4939-7423-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4939-7423-8).
10. G. D. C. Dhondt, *Finite Element Method for Three-dimensional Thermomechanical Applications*, John Wiley and Sons Inc., New York, 2004.
11. J. O. Dow, *A Unified Approach to The Finite Element Method and Error Analysis Procedures*, Academic Press, London, 1999.
12. E. Carrera, M. Cinefra, M. Petrolo, and E. Zappino, *Finite Element Analysis of Structures through Unified Formulation*, John Wiley and Sons Inc., New York, 2014.
13. R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, and R. J. Witt, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis - 4th Edition*, John Wiley & Sons, Incorporated, New York, 2001.
14. J. T. Oden and J. N. Reddy, *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, Dover Publications, 2009.
15. K. K. Gupta and J. L. Meek, *Finite Element Multidisciplinary Analysis, 2nd Edition*, AIAA Education Series, 2003.
16. K. H. Huebner, D. L. Dewhirst, T. G. Byrom, and D. E. Smith, *Finite Element Method for Engineers – 4th Edition*, John Wiley and Sons Inc., New York, 2001.
17. D. W. Hutton, *Fundamentals of Finite Element Analysis, McGraw-Hill College*, New York, 2003.
18. J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.
19. G. R. Liu, and S. S. Quek, *Finite Element Method: A Practical Course*, Butterworth-Heinemann, 2003.
20. G. R. Liu, and N. T. Trung, *Smoothed Finite Element Methods*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2010.
21. O. Pironneau, *Finite Element Methods for Fluids*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
22. A. Portela, *Finite Elements Using Maple: A Symbolic Programming Approach*, Springer Berlin Heidelberg, 2002.

23. S. S. Rao, *Finite Element Method in Engineering – 5th Edition*, Butterworth-Heinemann, Burlington, MA, 2011. ISBN: 978-1-85617-661-3.
24. J. N. Reddy, *Energy Principles and Variational Methods in Engineering - 2nd Edition*, John Wiley and Sons Inc., New York, 2002.
25. J. N. Reddy, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press, 2004.
26. J. N. Reddy, *Introduction to the Finite Element Method – 3rd Edition*, McGraw-Hill College, New York, 2005.
27. I. H. Shames and C. L. Dym, *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*, Taylor & Francis, 1985.
28. G. Strang and G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
29. O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method – 4th Edition – Volume 1: Basic Formulation and Linear Problems*, McGraw Hill, Inc., New York, 1989.
30. O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method – 4th Edition – Volume 2: Solid and Fluid Mechanics, Dynamics, and Non-linearity*, McGraw Hill, Inc., New York, 1991.

**COMENTARIOS:**

1. Notas de clase relativas a parte del material a cubrir en el curso serán provistas por los profesores responsables.
2. Software, como por ejemplo MATLAB y MAPLE, será utilizado para llevar a cabo simulaciones numéricas y simbólicas.

Sergio Preidikman  
Bruno A. Roccia

31 de octubre, 2018