



unc



FCEFYN

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

CINEU

Guía de

MATEMÁTICA





unc



FCEFyN

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

AUTORIDADES

DECANA

Dra. Ing. Magalí Carro Pérez

VICEDECANO

Dr. Ing. Jorge Finochietto

SECRETARIO GENERAL

Mg. Ing. Miguel Ruiz Caturelli

SECRETARIO ACADÉMICO

Dr. Ing. Daniel Glatstein

PROSECRETARIA PLANIFICACIÓN ACADÉMICA

Dra. Lic. Daniela Bordón

SECRETARIO DE ASUNTOS ESTUDIANTILES

Santiago Acuña

PROSECRETARIA DE ASUNTOS ESTUDIANTILES

Antonella Fedelle

COORDINADORA DEL CINEU

Dra. Ing. Claudia Egea

COORDINADORA DE LA MATERIA

Dra. Lic. Lila Asar



unc



FCEFN

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

AUTORES

Prof. Mg. Ing. Jorge Alberto Azpilicueta

Prof. Ing. Laura Vargas

Prof. Ing. Héctor Gabriel Tavella

Prof. Esp. Ing. Pablo Bobatto

Prof. Ing. José Luis Galopo

Prof. Dra Claudia M. Egea

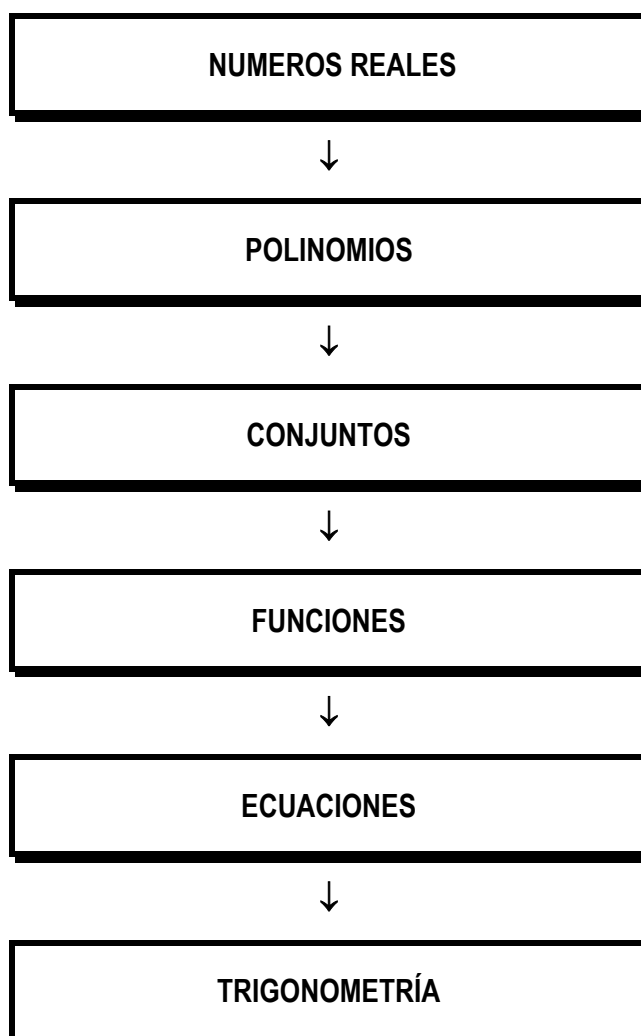
Prof. Dra. María Lila Asar

Objetivos Generales

Al finalizar el estudio de Matemática del Ciclo de Nivelación usted deberá ser capaz de:

1. **Utilizar una metodología adecuada para el estudio de la Matemática.**
2. **Alcanzar destreza operativa en temas básicos de Álgebra y Trigonometría como aplicación de conceptos teóricos.**
3. **Resolver problemas con procedimientos específicos**

Esquema Conceptual



Detalle de temas por capítulo

Capítulo 1. Números Reales

- 1.1 Los números reales, operaciones y propiedades.
- 1.2 Representación decimal de un número real
- 1.3 Propiedades de las Operaciones con números reales
- 1.4 Operaciones con fracciones
- 1.5 Representación gráfica de los números reales
- 1.6 Orden de los números reales
- 1.7 Potencias de un número real
- 1.8 Raíces de un número real

Capítulo 2. Polinomios

- 2.1 Polinomios. Grado
- 2.2 Operaciones con polinomios: adición, multiplicación y división.
- 2.3 Divisibilidad. Valuación. Teorema del resto.
- 2.4 Raíz de un polinomio. Orden de multiplicidad. Fórmula de Bhaskara
- 2.5 Descomposición factorial de un polinomio. Casos de factorio.

Capítulo 3. Conjuntos

- 3.1 Conjuntos y subconjuntos.
- 3.2 Operaciones con conjuntos.
- 3.3 Par ordenado. Producto cartesiano.
- 3.4 Correspondencia entre producto de la recta y números reales.
- 3.5 Pares ordenados de números reales.
- 3.6 Conjuntos de puntos. Intervalos.

Capítulo 4. Funciones

- 4.1 Relación y sus representaciones.
- 4.2 Funciones. Definición.
- 4.3 Funciones enteras de primer y segundo grado.

Capítulo 5. Ecuaciones.

- 5.1 Ecuación de primer grado con una y dos incógnitas.
- 5.2 Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- 5.3 Ecuación de segundo grado con una incógnita. Reconstrucción de la ecuación de segundo grado con una incógnita, conocidas sus raíces.
- 5.4 Sistemas mixtos. Método de sustitución.

Capítulo 6. Trigonometría

- 6.1 Longitud de un arco de circunferencia. Ángulos y su medición (grados, radianes).
- 6.2 Funciones trigonométricas. Relaciones fundamentales.
- 6.3 Seno, coseno y tangente de los ángulos notables.
- 6.4 Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos.

Bibliografía

Como bibliografía se aconseja utilizar los textos de estudio del secundario, sin destacar ninguno en particular.

Orientación del Aprendizaje

Esta guía de enseñanza presenta los conceptos básicos del número real, sus operaciones y propiedades básicas. Considera los polinomios como entes abstractos y estudia sus operaciones y propiedades. Previo a la definición de función se estudian los conjuntos y sus propiedades. Hace hincapié en las funciones polinómicas de primer y segundo grado y en las funciones exponencial y logarítmica. Plantea la resolución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, y de segundo grado con una incógnita. Estudia, también, la resolución de sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y de sistemas mixtos. Desarrolla, en trigonometría, resolución de triángulos e identidades trigonométricas fundamentales. En cada caso se plantea una introducción teórica al tema, el desarrollo de ejemplos y la ejercitación correspondiente.

El alumno deberá utilizar, además de esta guía, los textos específicos de Matemática que estudió en la escuela media, a fin de reforzar el aprendizaje.

Recuerde

“... la ciencia matemática no es el fruto de la contemplación, no es descriptiva en ninguna de sus partes, es una actividad humana reducida a sus elementos intelectuales esenciales. Comprender un resultado matemático es saber utilizarlo. Conocer una teoría matemática es saber reconstruirla como si fuera su creador. Aprender una demostración de memoria sin comprenderla es una proeza que intentan algunos valientes ingenuos, pero es la que nunca he visto triunfar...”

Matemática Moderna. Matemática Viva, de A. Revuz.

Por ello, es recomendable estudiar Matemática teniendo a mano abundante papel borrador y lápiz.

En consecuencia:

- 1. Lea la introducción teórica tratando de comprenderla.**
- 2. Aclare los conceptos desarrollando personalmente los ejemplos.**
- 3. Realice la ejercitación correspondiente. Si tiene dificultades, repita los puntos 1 y 2.**
- 4. Si no tiene éxito, no desespere, solicite ayuda al docente.**

Capítulo 1: Números reales

Objetivos

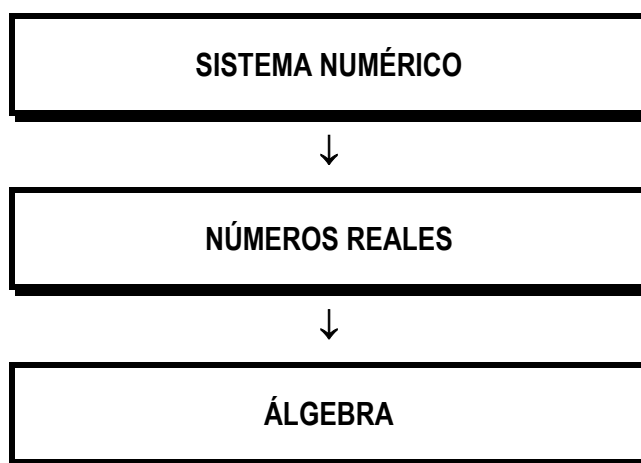
Al finalizar esta unidad usted deberá ser capaz de:

- **Identificar números naturales, enteros, racionales, irracionales y complejos.**
- **Operar con números reales y complejos utilizando sus propiedades.**

Contenidos

- 1.1 Los números reales, operaciones y propiedades.
- 1.2 Representación decimal de un número real
- 1.3 Propiedades de las Operaciones con números reales
- 1.4 Operaciones con fracciones
- 1.5 Representación gráfica de los números reales
- 1.6 Orden de los números reales
- 1.7 Potencias de un número real
- 1.8 Raíces de un número real

Esquema conceptual



Introducción

En esta unidad se revisan los conceptos necesarios para trabajar las principales operaciones en el campo de los números reales y complejos, que ya se han visto en cursos de la escuela media.

Orientación del aprendizaje

Lea la introducción teórica de cada tema y desarrolle personalmente los ejemplos que le siguen. Realice la ejercitación correspondiente.

Bibliografía de la unidad

Como bibliografía se aconseja utilizar los textos de estudio del secundario, sin destacar ninguno en particular.

Aprender a calcular con exactitud, operar símbolos con facilidad y aplicar con seguridad las propiedades de los números reales y complejos es un objetivo fundamental para el estudiante de Ciencias Naturales y de Ingeniería.

1.1. Los números reales, operaciones y propiedades.

Los procedimientos cuantitativos básicos de la ciencia comprenden las operaciones de contar y medir. Contar significa caracterizar una colección o conjunto de objetos mediante un número, en tanto que medir es asignar un número a alguna propiedad de un objeto. Las nociones de “contar” y “medir”, al igual que la de conjunto, distan de ser conceptos simples. Cada una de estas nociones ha sido objeto de muchos estudios en el campo de la metodología científica. Lo importante para nosotros en el presente estudio es el hecho de que tanto “contar” como “medir” conducen a números, y mediante el uso de números y conjuntos es posible lograr una buena comprensión de los fenómenos de la naturaleza.

En este capítulo repasaremos los diferentes conjuntos numéricos que conocemos, cómo se relacionan y cómo operar con ellos. Muchas de las operaciones y expresiones aquí mencionadas ya son conocidas por el lector, pero resulta necesario repasarlas y analizarlas para introducir cierta notación y formalidad que usaremos luego en las materias de matemática más avanzada.

Históricamente, los conjuntos de números fueron creados para satisfacer diferentes necesidades. Los números naturales nos permiten contar, los enteros nos permiten describir temperaturas bajo cero o subsuelos en un edificio. Los racionales nos permiten describir partes de un todo, por ejemplo “dos tercios de una torta” y los irracionales nos permiten describir ciertas medidas por ejemplo la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a una unidad.

Repasemos estos conjuntos numéricos. Los naturales serán representados con la letra $\mathbb{N}$, escribimos

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

usaremos los tres puntos “...” para indicar que el conjunto continúa.

Los enteros serán representados con la letra $\mathbb{Z}$, escribimos

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

Los racionales serán representados con la letra $\mathbb{Q}$, y se obtienen al realizar cocientes de números enteros, por ejemplo $\frac{3}{4}$; $\frac{-7}{5}$; $\frac{8}{1} = 8$; $0,21 = \frac{21}{100}$

Escribimos

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{m}{n} : m, n \text{ son enteros y } n \neq 0 \right\}$$

Los irracionales serán representados con la letra $\mathbb{I}$, y no se pueden expresar como cociente de números enteros, es decir tienen una representación decimal infinita no periódica, por ejemplo $\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$; $\sqrt{3} = 1,73205081 \dots$; $e = 2,71828183 \dots$; $\pi = 3,14159265 \dots$

El conjunto de números reales será representado con la letra $\mathbb{R}$ y es la unión de los conjuntos racionales e irracionales. El siguiente diagrama muestra la relación entre los diferentes conjuntos numéricos:

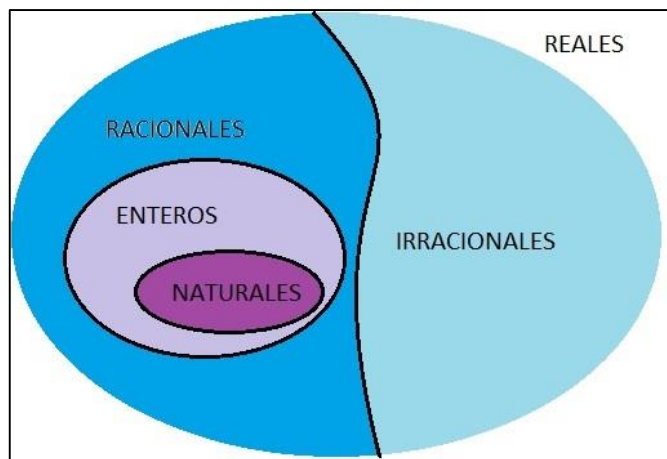


Figura 1.1. Diagrama que muestra la relación entre los diferentes conjuntos numéricos.

1.2. Representación decimal de un número real

Todo número real tiene una representación decimal. Si el número es racional, su representación decimal es finita o infinita periódica, por ejemplo

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 0,500000000 \dots = 0,5\hat{0} ;$$

$$\frac{1}{3} = 0,3333333333 \dots = 0,\hat{3}$$

$$\frac{9}{7} = 1,285714285714 \dots = 1,\overline{285714}$$

Como ya mencionamos, si el número es irracional su representación decimal es infinita no es periódica. Cuando consideramos finitos decimales de la expansión de un número irracional obtenemos una **aproximación** de dicho número. Por ejemplo, solemos decir $\sqrt{2} \approx 1,41$ para aproximar el número irracional $\sqrt{2}$ por el número racional 1,41.

En lo que sigue, recordemos cómo podemos obtener una fracción equivalente a un número decimal dado. Para simplificar el proceso consideraremos tres casos: decimal finito, decimal periódico puro, decimal periódico mixto.

Caso 1: decimal finito.

Este es el caso de un número con finitos lugares después de la coma. Para expresar su fracción equivalente procedemos a colocar el número sin la coma en el numerador y en el denominador consideramos una potencia de 10 con tantos ceros como lugares después de la coma. Veamos algunos ejemplos:

$$0,5 = \frac{5}{10} ; \quad 2,04 = \frac{204}{100} ; \quad 16,531 = \frac{16531}{1000}$$

Podemos luego simplificar las fracciones para obtener su expresión irreducible, en los ejemplos:

$$0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} ; \quad 2,04 = \frac{204}{100} = \frac{51}{25} ; \quad 16,531 = \frac{16531}{1000}$$

Caso 2: decimal periódico puro.

Este es el caso de un número decimal con su parte periódica inmediatamente después de la coma, llamaremos **período** a la expresión que se repite. Para escribir la fracción equivalente procedemos a colocar en el numerador la resta del número completo (sin la coma y sin repeticiones) menos el valor **sin el período** y en el denominador un número formado con tantos 9 como cifras tenga el período. Analicemos algunos ejemplos:

$$0,\hat{3} = \frac{3}{9} ; \quad 2,\overline{65} = \frac{265-2}{99} = \frac{263}{99} ; \quad 16,\overline{15} = \frac{1615-16}{99} = \frac{1599}{99}$$

Nuevamente podemos simplificar las fracciones para obtener su expresión irreducible, en los ejemplos:

$$0,\hat{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} ; \quad 2,\overline{65} = \frac{263}{99} ; \quad 16,\overline{15} = \frac{1599}{99} = \frac{533}{33}$$

Caso 3: decimal periódico mixto.

En este caso, el número decimal tiene luego de la coma una parte no periódica que llamaremos **anteperíodo** y una parte periódica. Para escribirlo como fracción procedemos colocando el número completo (sin la coma y sin repeticiones) en el numerador y le restamos la

parte sin el período, luego en el denominador colocamos tantos 9 como cifras tenga el período y tanto 0 como cifras tenga el anteperíodo. Por ejemplo:

$$1,36666666 \dots = 1,3\widehat{6} = \frac{136 - 13}{90} = \frac{123}{90}$$

$$2,346565 \dots = 2,34\widehat{65} = \frac{23465 - 234}{9900} = \frac{23231}{9900}$$

Nuevamente simplificamos si fuera posible.

Por otro lado, para pasar una expresión **fraccionaria a decimal** sólo debemos realizar la división que dicha fracción representa.

1.3. Propiedades de las operaciones con números reales

Desde edad temprana hemos aprendido a sumar y multiplicar números reales, y por experiencia conocemos algunas de las propiedades de estas operaciones. A continuación, vamos a enumerar dichas propiedades.

1) Propiedad **conmutativa**: no importa el orden en el cual se realice la suma o la multiplicación el resultado obtenido es el mismo. Enunciamos formalmente dicha propiedad de la siguiente manera:

Cualesquiera sean los números reales a y b tenemos: $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$

2) Propiedad **asociativa**: si tenemos tres números, no importa cuales dos sumamos o multiplicamos primero. Formalmente:

$(a + b) + c = a + (b + c)$ y $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, cualesquiera sean a , b y c

3) Existencia del **neutro de la suma**: existe un elemento especial, el 0, que cumple que: $a + 0 = a$, cualquiera sea a .

4) Existencia del **neutro de la multiplicación**: existe un elemento especial, el 1 (distinto de 0) que cumple:

$a \cdot 1 = a$, cualquiera sea a .

5) Existencia del **opuesto**: se cumple además que todo número real tiene **opuesto**, es decir para cada número real a existe $-a$ que cumple que $a + (-a) = 0$.

Por ejemplo: si $a = 5$, $-a = -5$, ya que $5 + (-5) = 0$;

si $a = -7$, entonces $-a = 7$ cumple que $-7 + 7 = 0$

6) Existencia del **inverso**: Respecto de la multiplicación, todo número real a no nulo

$(a \neq 0)$ tiene **inverso** $a^{-1} = \frac{1}{a}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$

Por ejemplo:

si $a = 5$ entonces $a^{-1} = \frac{1}{5}$ ya que $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$.

Si $a = \frac{1}{7}$ entonces $a^{-1} = 7$ ya que $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.

7) Propiedad **distributiva**: esta propiedad relaciona las operaciones de suma y producto y se enuncia de la siguiente manera:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, cualesquiera sean a , b y c números reales.

Observación: En muchos casos no escribimos el punto (.) para denotar la multiplicación sino que se sobreentiende, así interpretamos ab como $a \cdot b$

Recordemos que si queremos multiplicar números de diferente signo debemos aplicar la regla de los signos:

Signo de a	Signo de b	Signo de ab
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

Mostraremos a continuación algunos ejemplos donde usaremos la regla de los signos y las propiedades de números reales.

Ejemplo 1.1: Resolver la siguiente expresión $4 - [4 + 2(3 - 5) - 7(-1 + 3)] = ?$

Existen diferentes caminos posibles para realizar estas operaciones, aquí propondremos dos opciones diferentes y quedará como ejercicio al lector analizar otras alternativas.

El primer paso debe ser separar en términos para determinar que operaciones deben realizarse primero. La suma, la resta y los paréntesis o corchetes determinan los términos distintos:

$$\tilde{4} - \overbrace{[4 + 2 \cdot (3 - 5) - 7 \cdot (-1 + 3)]} =$$

Dentro del corchete, podemos nuevamente separar en términos:

$$\tilde{4} - \overbrace{[\tilde{4} + \overbrace{2 \cdot (3 - 5)} - \overbrace{7 \cdot (-1 + 3)}]} =$$

Vamos a aplicar propiedad distributiva para eliminar los paréntesis dentro del corchete ya que debemos resolver primero esos términos para luego poder realizar la suma.

$$4 - [4 + 2(3 - 5) - 7(-1 + 3)] = 4 - [4 + 6 - 10 + 7 - 21] =$$

Notemos que hemos usado regla de los signos al mismo tiempo. Luego agrupamos los términos de igual signo para sumar dentro del corchete

$$4 - [(4 + 6 + 7) - (10 + 21)] = 4 - [17 - 31]$$

A continuación, eliminamos los corchetes (usamos regla de los signos nuevamente) y obtenemos el resultado final:

$$4 - 17 + 31 = (4 + 31) - 17 = 35 - 17 = 18$$

Otra forma posible de resolver este ejercicio es realizando la operación dentro del paréntesis y luego eliminarlos, es decir:

$$4 - [4 + 2(3 - 5) - 7(-1 + 3)] = 4 - [4 + 2(-2) - 7(2)] = 4 - [4 - 4 - 14]$$

Asociando convenientemente, tenemos:

$$4 - [4 - (4 + 14)] = 4 - [4 - 18] = 4 - [-14] = 4 + 14 = 18$$

Llegamos al mismo resultado (como era de esperarse).

Ejemplo 1.2: Resolver la siguiente expresión: $7 - 8 + [4 - (\sqrt{2} + 3 - (6 + 2 - 7) - 10) - 5] = ?$

Cuando tenemos varios paréntesis anidados (es decir, unos dentro de otros), debemos quitarlos *desde adentro hacia afuera*, es decir los paréntesis más internos se eliminan primero:

$$\begin{aligned}
7-8+\left[4-\left(\sqrt{2}+3-(6+2-7)-10\right)-5\right] &= 7-8+\left[4-\left(\sqrt{2}+3-(\color{red}{6+2-7})-10\right)-5\right]= \\
&= 7-8+\left[4-\left(\sqrt{2}+3-\color{red}{6-2+7}-10\right)-5\right] \\
&= 7-8+\left[4-\left(\sqrt{2}+3-\color{blue}{6-2+7-10}\right)-5\right] \\
&= 7-8+\left[4-\sqrt{2}-3+\color{blue}{6+2-7+10}-5\right] \\
&= 7-8+\left[\color{violet}{4-\sqrt{2}-3+6+2-7+10-5}\right] \\
&= 7-8+\color{violet}{4-\sqrt{2}-3+6+2-7+10-5} \\
&= 7-8+4-\sqrt{2}-3+6+2-7+10-5
\end{aligned}$$

Agrupamos convenientemente y operamos:

$$\begin{aligned}
7-8+4-\sqrt{2}-3+6+2-7+10-5 &= (7+4+6+2+10)-(8+\sqrt{2}+3+7+5) \\
&= 29-(23+\sqrt{2}) \\
&= 29-23-\sqrt{2} \\
&= 6-\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Como el número $\sqrt{2}$ es irracional, dejaremos expresado de esa manera el resultado para que sea el valor exacto. Si reemplazamos $\sqrt{2}$ por una aproximación decimal estaríamos obteniendo un resultado aproximado.

En este ejercicio también podríamos resolver primero las operaciones en cada paréntesis interior y luego quitar los paréntesis, es decir:

$$\begin{aligned}
7-8+\left[4-\left(\sqrt{2}+3-(\color{red}{6+2-7})-10\right)-5\right] &= 7-8+\left[4-\left(\sqrt{2}+3-(\color{red}{8-7})-10\right)-5\right]= \\
&= 7-8+\left[4-\left(\sqrt{2}+3-(\color{red}{1})-10\right)-5\right] \\
&= 7-8+\left[4-\left(\sqrt{2}+3-\color{blue}{1-10}\right)-5\right] \\
&= 7-8+\left[4-\left(\sqrt{2}-\color{blue}{8}\right)-5\right] \\
&= 7-8+\left[\color{violet}{4-\sqrt{2}+8-5}\right] \\
&= 7-8+\left[\color{violet}{7-\sqrt{2}}\right] \\
&= 7-8+7-\sqrt{2} \\
&= 6-\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Notar que no vamos a reemplazar $\sqrt{2}$ para no aproximar el resultado. Siempre aplicamos la regla de los signos para eliminar cada paréntesis y resolvemos, llegando al mismo resultado (como era de esperarse).

1.4. Operaciones con fracciones

Si bien suponemos que el lector conoce cómo realizar la suma y multiplicación de números reales, repasaremos brevemente cómo realizarlas para el caso de fracciones.

Nota: Insistimos en que deben reforzar estos conceptos, puesto que se utilizarán en expresiones más complejas durante el cursado de las materias del primer semestre.

Multiplicación	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
División	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$
Suma con igual denominador	$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
Suma con distinto denominador	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

En el caso de sumar fracciones con distinto denominador, no siempre es necesario considerar la multiplicación de los denominadores, sino que es suficiente tomar un múltiplo común a ambos denominadores.

Ejemplo 1.3: Resolver la siguiente suma: $\frac{7}{4} + \frac{5}{6} = \frac{7 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{12} = \frac{21+10}{12} = \frac{31}{12}$

Recordemos también si tanto numerador como denominador tiene un factor común, podemos simplificar la fracción.

Ejemplo 1.4: Simplificamos las siguientes fracciones:

$$\frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{22}{44} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Veamos algunos ejemplos de cómo operar con fracciones.

Ejemplo 1.5: Resolver: $\frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{9} - \frac{1}{18}\right)}{\left(1 + \frac{1}{6}\right)} = ?$

Podemos reescribir esta expresión de la siguiente manera:

$$\frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{9} - \frac{1}{18}\right)}{\left(1 + \frac{1}{6}\right)} = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{9} - \frac{1}{18}\right) : \left(1 + \frac{1}{6}\right)$$

Primero sumamos las fracciones en cada paréntesis por separado:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{9} - \frac{1}{18}\right) : \left(1 + \frac{1}{6}\right) &= \left(\frac{3 \cdot 9 - 5 \cdot 2 - 1}{18}\right) : \left(\frac{1 \cdot 6 + 1}{6}\right) \\ &= \left(\frac{27 - 10 - 1}{18}\right) : \left(\frac{7}{6}\right) \\ &= \left(\frac{16}{18}\right) : \left(\frac{7}{6}\right) \end{aligned}$$

En este paso conviene simplificar las fracciones para trabajar con valores numéricos menores. En este ejemplo podemos simplificar la fracción $16 / 18$ por 2, obteniendo $8/9$ y además podemos simplificar el denominador 9 con el denominador 6, luego

$$\left(\frac{16}{18}\right) : \left(\frac{7}{6}\right) = \left(\frac{8}{9}\right) : \left(\frac{7}{6}\right) = \frac{8}{9} : \frac{7}{6} = \frac{8}{3} : \frac{7}{2}$$

Finalmente, realizamos la división de las fracciones

$$\frac{8}{3} : \frac{7}{2} = \frac{8 \cdot 2}{3 \cdot 7} = \frac{16}{21}$$

Ejemplo 1.6: Resolvemos la siguiente expresión:

$$2 + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{8}{15} - \frac{3}{10}\right) = ?$$

Comenzamos operando en cada paréntesis

$$2 + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{8}{15} - \frac{3}{10}\right) = 2 + \left(\frac{5 \cdot 2 - 1}{12}\right) \left(\frac{8 \cdot 2 - 3 \cdot 3}{30}\right) \\ = 2 + \left(\frac{9}{12}\right) \left(\frac{7}{30}\right)$$

Simplificamos las fracciones: primero 9/12, luego 3 y 30, obteniendo:

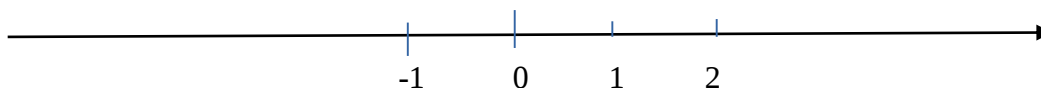
$$2 + \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{7}{30}\right) = 2 + \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{7}{30}\right) = 2 + \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{7}{10}\right)$$

Multiplicamos primero, ya que debemos separar en términos, y luego sumamos:

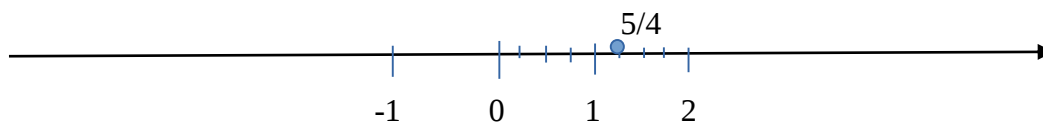
$$2 + \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{7}{10}\right) = 2 + \frac{7}{40} = \frac{2 \cdot 40 + 7}{40} = \frac{87}{40}$$

1.5. Representación gráfica de los números reales

Todo número real puede ser representado como un punto sobre una recta como se muestra en la siguiente figura. Elegimos un punto arbitrario que llamaremos origen para representar el 0, a la derecha de él consideraremos los números positivos y lo indicamos con una flecha. Hacia la izquierda del origen marcamos los números negativos. Consideramos una longitud arbitraria para representar la unidad y la repetimos hacia la derecha para denotar los números naturales. De manera análoga, marcamos los enteros negativos hacia la izquierda.



Para representar una fracción debemos dividir la unidad (o unidades) en tantas partes como indica el denominador y tomamos tantas de esas partes como indica el numerador. Como ejemplo, marquemos el punto 5/4. El denominador es 4, luego debemos dividir la unidad en 4 partes. Como el numerador es 5 necesitamos tomar 5 de esas partes, luego no nos alcanza con una unidad por lo cual debemos fraccionar la segunda unidad, tenemos entonces:



1.6. Orden de los números reales

Otra característica muy importante de los números reales es que son **ordenados**. Esto significa que dados a y b , diremos que **a es menor que b** y escribimos $a < b$, si el número $b - a$ es positivo. De manera equivalente podemos decir que **b es mayor que a** y escribimos $b > a$.

Algunas de las propiedades del orden de los números reales son:

1) **Tricotomía:** Dados dos números reales a y b se cumple una y solo una de las siguientes afirmaciones: $a < b$, o bien $a > b$, o bien $a = b$.

2) **Consistencia del orden respecto de la suma:** Dados 3 números reales a , b y c , si se cumple que $a < b$ entonces $a + c < b + c$

Esta propiedad nos dice que si sumamos un valor c arbitrario en ambos miembros de una desigualdad esta se mantiene.

Por ejemplo: $5 < 7$ luego $5+3 < 7+3$

3) **Consistencia del orden respecto del producto:** Dados 3 números reales a , b y c , si se cumple que $a < b$ y $c > 0$ entonces $a \cdot c < b \cdot c$

Esta propiedad nos dice que si multiplicamos por un valor c **positivo** en ambos miembros de una desigualdad esta se mantiene.

Por ejemplo: $5 < 7$ luego $5 \cdot \frac{1}{2} < 7 \cdot \frac{1}{2}$

Observación: Es importante destacar que si el número c es **negativo** entonces al multiplicar la desigualdad por ese valor la misma se invierte.

Por ejemplo: $5 < 7$ luego $5 \cdot (-2) > 7 \cdot (-2)$

1.7. Potencias de un número real

En esta sección repasaremos las propiedades de las potencias y radicales de números reales.

Supongamos que queremos calcular la multiplicación $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$, para abreviar dicha expresión introducimos la siguiente notación: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$

En general, si a es un número real y n es un natural escribimos a^n para describir la multiplicación **n veces** del número real a . Es decir

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ veces}}$$

Llamaremos **exponente** al natural n y **base** al número a .

Definimos también a^{-n} como $\left(\frac{1}{a}\right)^n$, siempre que n sea un número natural. Además, si a es distinto de 0 ($a \neq 0$), definimos $a^0 = 1$.

IMPORTANTE: Debemos hacer un uso correcto de los paréntesis en el caso de que a sea un número negativo. Por ejemplo: $(-5)^4$ y -5^4 **NO SON IGUALES**.

Observemos que en el primer caso: $(-5)^4 = (-5)(-5)(-5)(-5) = 625$, mientras que en el segundo caso tenemos: $-5^4 = -5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = -625$, es decir: el opuesto de 5^4 .

Podemos deducir las siguientes propiedades de las potencias, para a y b números reales y n y m naturales:

➤ $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, en efecto: si multiplico n veces a y luego m veces a , el resultado es igual a multiplicar $n+m$ veces a .

➤ $a^n : a^m = a^{n-m}$, en efecto: $a^n : a^m = a^n \cdot \left(\frac{1}{a^m}\right) = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$

➤ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

(¿Cómo podría justificar esta afirmación?)

➤ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,

Para justificar esta afirmación notemos que $(a \cdot b)^n$ es igual a multiplicar ab por si mismo n veces, es decir:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \dots (a \cdot b)}_{n \text{ veces}}$$

aplicando reiteradas veces la propiedad asociativa y la propiedad conmutativa podemos reescribir esta expresión:

$$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \dots (a \cdot b) = \underbrace{(a \cdot a \dots a)}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \dots b)}_{n \text{ veces}}$$

lo que es igual a $a^n \cdot b^n$ como queríamos probar.

➤ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

(Es un buen ejercicio para el lector tratar de justificar esta afirmación de manera similar a la justificación de la propiedad anterior)

Analicemos algunos ejemplos para mostrar cómo aplicar las propiedades de las potencias:

Ejemplo 1.7: Resolver aplicando propiedades:

$$\frac{a^3 \cdot b^2 \cdot c^4 \cdot a^4 \cdot b^{-3}}{a^5 \cdot b^4 \cdot c^{-5}} = a^{3+4-5} \cdot b^{2-3-4} \cdot c^{4-(-5)} = a^2 \cdot b^{-5} \cdot c^9 = \frac{a^2 \cdot c^9}{b^5}$$

Ejemplo 1.8: Resolver aplicando propiedades:

$$\begin{aligned} (x \cdot y)^2 \cdot c^4 \cdot x^4 \cdot (x \cdot y^{-1})^{-3} &= x^2 \cdot y^2 \cdot c^4 \cdot x^4 \cdot x^{-3} \cdot (y^{-1})^{-3} \\ &= x^{2+4-3} \cdot y^{2+3} \cdot c^4 \\ &= x^3 \cdot y^5 \cdot c^4 \end{aligned}$$

1.8. Raíces de un número real

Sea a un número real y n un número natural, definimos la **raíz n -ésima** de a por el número real b que cumple que $b^n = a$, escribimos

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si se cumple que } b^n = a$$

Veamos algunos ejemplos:

- $\sqrt[3]{8} = 2$ pues $2^3 = 8$
- $\sqrt[5]{243} = 3$ pues $3^5 = 243$
- $\sqrt[4]{256} = 4$ pues $4^4 = 256$

Notemos que la raíz n -ésima de a no siempre está definida. Por ejemplo $\sqrt[4]{-16}$ no está definida pues no existe ningún número real b tal que $b^4 = -16$. De manera similar para cualquier raíz de índice n par si el radicando a es negativo.

Si el índice de la raíz n es igual a 2 no lo escribimos sino que se sobreentiende, por ejemplo $\sqrt{4} = 2$.

Observación: La raíz n -ésima de un número real puede expresarse como una potencia. En efecto:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Luego, todas las propiedades de las potencias pueden aplicarse a los radicales siempre y cuando el radical esté definido. Realicemos algunos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 1.9: Resolver aplicando propiedades:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{b^3 \cdot a^8 \cdot (a \cdot b)^{20}}{a^{-10} \cdot b^{-1}}}} &= \sqrt[12]{\frac{b^3 \cdot a^8 \cdot (a \cdot b)^{20}}{a^{-10} \cdot b^{-1}}} \\
 &= \sqrt[12]{\frac{b^3 \cdot a^8 \cdot a^{20} \cdot b^{20}}{a^{-10} \cdot b^{-1}}} \\
 &= \sqrt[12]{b^{23-(-1)} \cdot a^{28-(-10)}} \\
 &= \sqrt[12]{b^{24} \cdot a^{38}} \\
 &= \sqrt[12]{b^{24}} \cdot \sqrt[12]{a^{38}} \\
 &= b^2 \cdot \sqrt[12]{a^{36+2}} \\
 &= b^2 \cdot \sqrt[12]{a^{36} \cdot a^2} \\
 &= b^2 \cdot \sqrt[12]{a^{36}} \cdot \sqrt[12]{a^2} \\
 &= b^2 \cdot a^3 \cdot \sqrt[6]{a}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.10: Resolver aplicando propiedades:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{(x^3 \cdot a^7):(a \cdot y)^{10}} &= \sqrt[3]{\frac{x^3 \cdot a^7}{(a \cdot y)^{10}}} = \sqrt[3]{\frac{x^3 \cdot a^7}{a^{10} \cdot y^{10}}} \\
 &= \sqrt[3]{x^3 \cdot a^7 \cdot a^{-10} \cdot y^{-10}} \\
 &= \sqrt[3]{x^3 \cdot a^{7-10} \cdot y^{-10}} \\
 &= \sqrt[3]{x^3 \cdot a^{-3} \cdot y^{-9-1}} \\
 &= \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{a^{-3}} \cdot \sqrt[3]{y^{-9-1}} \\
 &= x \cdot a^{-1} \cdot y^{-3} \cdot \sqrt[3]{y^{-1}} \\
 &= \frac{x}{a \cdot y^3 \cdot \sqrt[3]{y}}
 \end{aligned}$$

Observación: Antes de aplicar una propiedad de la potencia, debemos chequear que tenga sentido aplicarla para el radicando en consideración. Por ejemplo: la propiedad $\sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2}$ puede aplicarse siempre y cuando **x sea positivo**. Si por ejemplo $x = -8$ **no puede aplicarse dicha propiedad**. En efecto: $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-8} = -2$ pero $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$.

Ejercitación del Capítulo 1

Ejercicio 1.1) En los siguientes apartados realice las operaciones indicadas:

$$1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)^{-2} : \frac{10}{3} = \quad R = \frac{10}{3}$$

$$2) \sqrt{\frac{3}{5} + \frac{1}{25}} - \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} = \quad R = \frac{17}{25}$$

$$3) \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) : \frac{7}{40}} = \quad R = 2$$

$$4) \left(\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{16}{25}} - \sqrt{\frac{1}{225}}\right)^2 = \quad R = \frac{49}{25}$$

$$5) \sqrt{\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} + \frac{2}{\sqrt{9}}\right) \cdot 15} = \quad R = 4$$

$$6) \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}} = \quad R = 2$$

$$7) \sqrt{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{13}{6}\right)^2 + \left[\frac{3}{5} : \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right)\right]^2} = \quad R = 5$$

$$8) \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{7}\right) : \left(1 - \frac{3}{17}\right)^{-1}} = \quad R = 1$$

$$9) \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{19}{25} - \frac{2}{5}} = \quad R = \frac{9}{10}$$

$$10) \left(-\frac{6}{3} - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + 3^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) = \quad R = -14$$

$$11) \left(\frac{1}{3} + \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} + \sqrt[4]{16}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[5]{32}}\right) = \quad R = -3$$

$$12) \left(\frac{1 + \sqrt{9}}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1 - \sqrt[3]{-8}}{6}\right)^2 + \left(\frac{8 - \sqrt[5]{32}}{3}\right)^{-3} = \quad R = \frac{7}{8}$$

$$13) \frac{1}{\sqrt[3]{-1}+3} - \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{64}}\right)^{-1} - (\sqrt{5})^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{343}} = \quad R = \frac{13}{42}$$

$$14) \left[2^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \right]^2 - \left[5^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \right]^3 \cdot \left(-1 + \frac{6^{-1}}{2^{-2}} \right) = \quad R = \frac{139}{3}$$

$$15) \frac{\left(\sqrt{1+\frac{9}{16}}\right)^{-1} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}}{\sqrt{3^{-4}} \cdot 3^3} = \quad R = \frac{4}{45}$$

$$16) \left(\sqrt{0,25} + 0,3 + \frac{1}{5} \right) \cdot \sqrt{1-0,36} \cdot \sqrt[3]{\frac{63}{64}} - 1 = \quad R = -\frac{1}{5}$$

$$17) \left[\frac{\frac{2}{3} + 0,4}{(0,2)^3} : \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt[3]{-1+0,784}} \right] \cdot \left[-3 - \left(\frac{-0,2}{5}\right) \right] = \quad R = \frac{74}{5}$$

$$18) \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}{\sqrt{6^2 + 8^2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)} = \quad R = -\frac{2}{15}$$

$$19) \frac{\left(1 + \frac{1}{6}\right) \cdot \sqrt{5^2 - 4^2}}{\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{12}\right)} + (-4)^{-2} = \quad R = \frac{227}{48}$$

$$20) (-3)^2 + \frac{\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{12}\right)}{\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt{5^2 - 4^2}} = \quad R = \frac{181}{20}$$

$$21) (-3)^2 + \frac{\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{12}\right)^{-1}}{\sqrt[3]{27} + \sqrt{5^2 - 4^2}} = \quad R = \frac{64}{7}$$

$$22) \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{9} - \frac{1}{18}\right)^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{6}\right) \cdot \sqrt{5^2 - 4^2}} = \quad R = \frac{9}{28}$$

Ejercicio 1.2) Dar un número racional comprendido entre cada uno de los pares de números siguientes: Nota: la respuesta no es única

$$\text{a. } \frac{2}{3} \text{ y } \frac{3}{4} \qquad R = \frac{17}{24}$$

$$\text{b. } -\frac{1}{5} \text{ y } -\frac{2}{5} \qquad R = -\frac{3}{10}$$

$$\text{c. } \pi - 3 \text{ y } \frac{15}{100} \qquad R = (100\pi - 285) / 200$$

$$\text{d. } \frac{2}{5} \text{ y } \frac{3}{5} \qquad R = \frac{1}{2}, \frac{9}{20}$$

Ejercicio 1.3) Grafique los siguientes números sobre una recta y ordénelos de menor a mayor:

$$\frac{4}{5}; -2; \frac{0}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{2}{7}; \frac{6}{7}$$

Ejercicio 1.4) Reduzca a un denominador común y calcule lo que se pide en cada caso

$$\text{a) } 3 \text{ números racionales comprendidos entre } \frac{3}{5} \text{ y } \frac{4}{5}$$

$$\text{b) } 4 \text{ números racionales comprendidos entre } \frac{1}{3} \text{ y } \frac{3}{4}$$

$$\text{c) } 5 \text{ números racionales comprendidos entre } \frac{1}{5} \text{ y } \frac{5}{6}$$

Ejercicio 1.5) Escriba los siguientes números como cociente de dos enteros

$$\text{a. } 3,242424... \qquad R = \frac{321}{99}$$

$$\text{b. } 0,555... \qquad R = \frac{5}{9}$$

$$\text{c. } 0,142857142857... \qquad R = \frac{142857}{999999}$$

Ejercicio 1.6) Un alumno obtuvo 9, 7 y 6 de calificación en sus tres primeras evaluaciones de Álgebra. ¿Qué calificación debe obtener en la cuarta evaluación para que su promedio sea 8?

$$R = 10$$

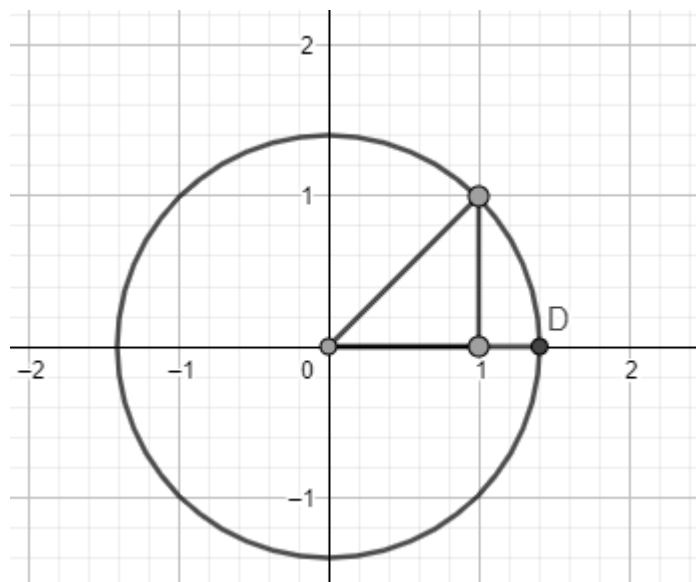
Ejercicio 1.7) Un granjero distribuyó cierto número de hectáreas de tierra entre sus tres hijos. Marta recibió $\frac{2}{3}$ de la tierra distribuida, Jorge $\frac{4}{7}$ de lo que quedó y por último Raúl se quedó con lo restante, 18 hectáreas. ¿Cuántas hectáreas obtuvo Marta?

R = 84 hectáreas

Ejercicio 1.8) Una persona caminó cierta distancia, trotó $2\frac{1}{2}$ la distancia que caminó y corrió $2\frac{1}{2}$ veces la distancia que trotó. Si en total recorrió 2.340 metros, ¿Cuánto caminó?

R = 240 metros

Ejercicio 1.9) Utilizando la siguiente figura, explique cómo localizar el elemento $\sqrt{2}$ en la recta real. Utilizando esta metodología, ¿podría localizar $\sqrt{3}$?



Capítulo 2: Polinomios

Objetivos

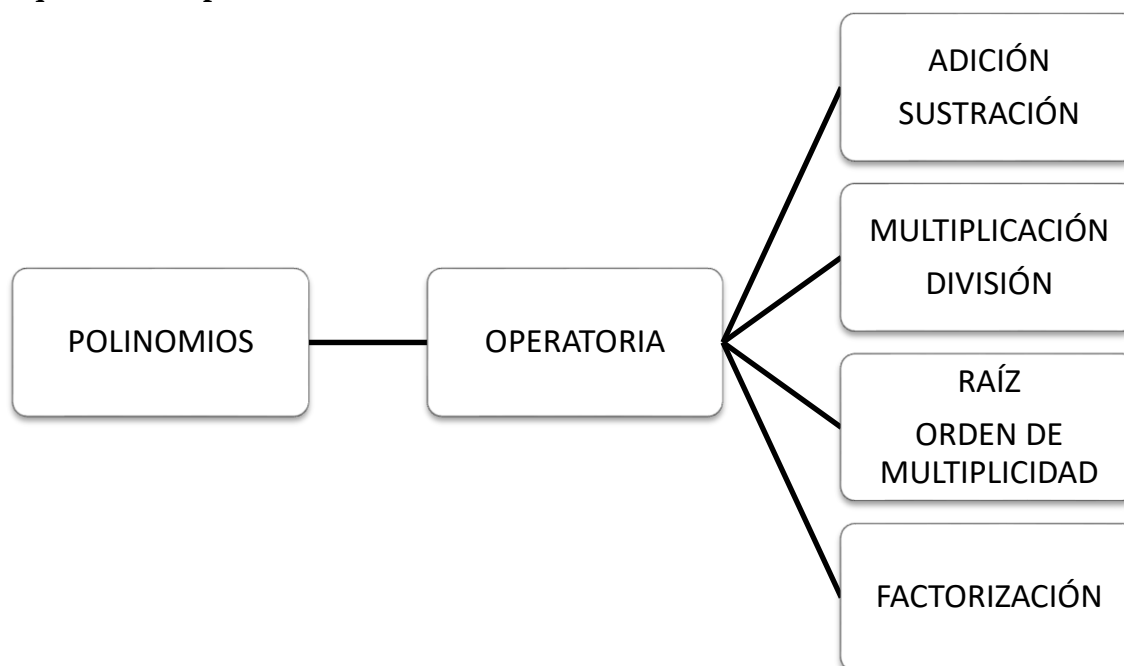
Al finalizar esta unidad usted deberá ser capaz de:

- **Identificar polinomios.**
- **Efectuar correctamente las operaciones con polinomios.**
- **Determinar si un polinomio A es divisor de un polinomio B.**
- **Determinar el orden de multiplicidad de la raíz de un polinomio.**
- **Factorizar polinomios.**

Contenidos

- 2.1 Polinomios. Grado
- 2.2 Operaciones con polinomios: adición, multiplicación y división.
- 2.3 Divisibilidad. Valuación. Teorema del resto.
- 2.4 Raíz de un polinomio. Orden de multiplicidad. Fórmula de Baskhara.
- 2.5 Descomposición factorial de un polinomio. Casos de factorreo.

Esquema conceptual



Introducción

Una expresión de la forma $P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$ recibe el nombre de polinomio en la indeterminada x . Este tipo de expresión aparece frecuentemente en diversas ramas de la matemática, como el álgebra, la geometría y el análisis, por lo que estudiaremos sus propiedades y operaciones.

Orientación del aprendizaje

Consideraremos los polinomios como entes abstractos, definiendo operaciones entre ellos y estudiaremos sus propiedades básicas.

Definición de polinomio

Denominaremos polinomio a coeficientes reales a toda expresión de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

Donde n es un número entero mayor o igual a cero, $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son números reales que llamaremos sus coeficientes y x es una variable.

Ejemplo 2.1: $P(x) = 1 + 3x - 2x^2 + x^3$

En este caso $n = 3$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = -2$, $a_3 = 1$

Ejemplo 2.2: $P(x) = 3x^2 + 5x^4$

En este caso $n = 4$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, $a_4 = 5$

Ejemplo 2.3: $P(x) = 3$

En este caso $n = 0$, $a_0 = 3$; se suele escribir: $P(x) = 3x^0$.

Es costumbre no escribir los coeficientes nulos. El polinomio del ejemplo 2.2 también puede escribirse como $P(x) = 0 + 0.x + 3x^2 + 0.x^3 + 5x^4$.

Tampoco escribiremos el coeficiente cuando es igual a uno; por ejemplo, $1x^3 = x^3$.

Denominaremos a_i al coeficiente del término de grado i ; por ejemplo, a_4 es el coeficiente del término de grado 4.

Llamaremos **polinomio nulo** al que tiene todos sus coeficientes nulos y lo notaremos por 0. Es decir $P = 0$, o lo que es lo mismo $P = 0x^0$.

Dos polinomios son iguales si y solo si tienen iguales los coeficientes de los términos del mismo grado.

Sea P un polinomio distinto de cero, es decir que tiene al menos un coeficiente no nulo. Si n es un entero no negativo, diremos que P tiene grado n cuando el coeficiente de grado n de P es distinto de cero y los de grado mayor que n son nulos. Esto es equivalente a decir que P es de la forma $a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \dots + a_n.x^n$ con $a_n \neq 0$. Notaremos $gr(P) = n$ y que el polinomio 0 no tiene grado.

Ejemplo 2.4: $gr(2 - x - x^2) = 2$

Ejemplo 2.5: $gr(9) = 0$

Denominaremos monomio de grado n a todo polinomio de la forma $a.x^n$ donde a es un número real. Es decir: un monomio es un polinomio que tiene a lo sumo un único coeficiente distinto de cero.

Ejemplo 2.6: $3x^4$ es un monomio de grado 4

Ejemplo 2.7: $-x^2$ es un monomio de grado 2

Ejemplo 2.8: $4x^0$ es un monomio de grado 0

2.2 Operaciones con polinomios

2.2.1 Adición:

Sean los polinomios

$$P = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \text{ y } Q = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \dots + b_m \cdot x^m$$

Definimos la suma de los polinomios como:

$$P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot x + \dots + (a_n + b_n) \cdot x^n$$

Es decir, el coeficiente de grado i de $P+Q$ se obtiene sumando los coeficientes de grado i de P y de Q .

Siempre podemos suponer que $n = m$, pues si fuera, por ejemplo, $n < m$, completaremos a P con términos cuyos coeficientes sean ceros.

Ejemplo 2.9:

$$\text{Sean: } P = 3 - 2x^2 + 3x^3 + 9x^4 - 11x^5 \text{ y } Q = 4x - 6x^2 + 28x^5$$

Disponemos el cálculo de la siguiente forma:

-11	9	3	-2	0	3
28	0	0	-6	4	0
17	9	3	-8	4	3

$$\text{Por lo tanto: } P + Q = 3 + 4x - 8x^2 + 3x^3 + 9x^4 + 17x^5$$

Supongamos que P es de grado n y Q de grado m con $n < m$ entonces $gr(P+Q)$ es menor o igual que el máximo grado de P y Q .

En el ejemplo 2.9: $gr(P+Q) = 5$ (máximo grado)

En cambio, si $P = 2 + x + x^2$ y $Q = 5 + x - x^2$ El resultado es $P + Q = 7 + 2x$, y el grado es $gr(P+Q) = 1$ (menor que el máximo de los grados).

Propiedades:

1. Asociativa: si P , Q y T son polinomios, entonces $P+(Q+T)=(P+Q)+T$
2. Conmutativa: si P , Q y T son polinomios, entonces $P+Q=Q+P$
3. Elemento neutro: si P es un polinomio, $P+0=P$, es decir el polinomio nulo es el elemento neutro.
4. Si P es un polinomio, existe un polinomio Q tal que $P+Q=0$. Q se denomina el inverso aditivo de P y se nota por $-P$. Por ejemplo, si $P = 3 + x - 5x^2$ es $-P = -3 - x + 5x^2$

2.2.2 Sustracción de polinomios

La diferencia entre un polinomio P y un polinomio Q es el polinomio que se obtiene sumando a P el opuesto de Q .

$$P - Q = P + (-Q)$$

Ejemplo 2.10: si $P = 6 + 15x + 2x^2$ y $Q = -7x + 6x^2 - x^4$ la resta es

$$P - Q = (6 + 15x + 2x^2) - (-7x + 6x^2 - x^4)$$

$$P - Q = (6 + 15x + 2x^2) + (7x - 6x^2 + x^4)$$

$$P - Q = 6 + 22x - 4x^2 + x^4$$

2.2.3 Multiplicación de polinomios

Si ax^n y bx^m son monomios, definimos su producto como:

$$(ax^n) \cdot (bx^m) = a \cdot b \cdot x^{n+m}$$

Ejemplo 2.11:

$$3x^3 \cdot 5x^7 = 3 \cdot 5 \cdot x^{3+7} = 15x^{10}$$

Para multiplicar dos polinomios se aplica la ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, es decir: se multiplica cada término del primero por cada término del segundo y luego se suman los términos semejantes.

Ejemplo 2.12:

Sean $P = 2 - 6x + 3x^2 + 7x^4 - x^5$ y $Q = 2 + 3x - 4x^2$

Queremos encontrar el polinomio $P \cdot Q$. Disponemos los cálculos de la siguiente manera:

P			-1	7	0	3	-6	2
Q						-4	3	2
2.P			-2	14	0	6	-12	4
3x.P		-3	21	0	9	-18	6	
-4x ² .P	4	-28	0	-12	24	-8		
	4	-31	19	2	33	-20	-6	4

Por lo tanto:

$$P \cdot Q = 4 - 6x - 20x^2 + 33x^3 + 2x^4 + 19x^5 - 31x^6 + 4x^7$$

En símbolos, si

$$P = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \quad (a_n \neq 0)$$

$$Q = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \dots + b_m \cdot x^m \quad (b_m \neq 0)$$

Entonces:

$$P \cdot Q = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) \cdot x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) \cdot x^2 + \dots + a_nb_m \cdot x^{n+m}$$

Esto es, coeficiente del término de grado i del producto se obtiene sumando todos los productos de la forma a_kb_j con $k + j = i$. En el ejemplo anterior el coeficiente de grado uno del producto es:

$$a_0b_1 + a_1b_0 = (2) \cdot (3) + (-6) \cdot (2) = 6 - 12 = -6$$

Si P y Q son polinomios no nulos se verifica que:

$$gr(P \cdot Q) = gr(P) + gr(Q)$$

Propiedades del producto

1. Asociatividad: Si P , Q y T son polinomios entonces $P \cdot (Q \cdot T) = (P \cdot Q) \cdot T$
2. Conmutatividad: Si P y Q son polinomios entonces $P \cdot Q = Q \cdot P$
3. Existencia del elemento neutro: el polinomio $1x^0$ que indicamos simplemente por I , es el elemento neutro para el producto de polinomios, esto es que $I \cdot P = P$ para todo polinomio P .
4. Propiedad distributiva del producto respecto a la suma: Si P , Q y T son polinomios entonces $P \cdot (Q + T) = P \cdot Q + P \cdot T$

Estas propiedades, lo mismo que las de la suma, son consecuencia de la definición de las operaciones entre polinomios y de las propiedades de los números reales.

Observaciones:

1. No vale la propiedad de existencia de inverso multiplicativo, es decir, dad un polinomio P , no existe, en general, un polinomio Q tal que $P \cdot Q = 1$. En efecto, si tal Q existe, P debe ser distinto de cero; luego tomando grados resulta $\text{gr}(P \cdot Q) = \text{gr}(P) + \text{gr}(Q) = \text{gr}(1) = 0$. Como el grado es siempre mayor o igual a cero, la única posibilidad es que $\text{gr}(P) = 0$. Es decir, que únicamente tiene inverso multiplicativo los polinomios de grado cero. En este caso, si $P = ax^0$ su inverso es $P^{-1} = a^{-1} \cdot x^0$

2. Si $P = a$ y $Q = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \dots + b_m \cdot x^m$ es $P \cdot Q = (a \cdot b_0) + (a \cdot b_1) \cdot x + (a \cdot b_2) \cdot x^2 + \dots + (a \cdot b_m) \cdot x^m$

Es decir que para multiplicar un polinomio por una constante basta con multiplicar cada coeficiente por la constante.

2.2.4 División de polinomios

Sean P y Q polinomios, Q distinto de cero, existe siempre un único par de polinomios C y R que verifican:

1. $P = C \cdot Q + R$
2. $R = 0$ o $\text{gr}(R) < \text{gr}(Q)$

El polinomio P se denomina dividendo y el polinomio Q divisor. Llamaremos a C el cociente y a R el resto de la división de P por Q .

Sean entonces

$$\begin{aligned} P &= a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n & \text{y} \\ Q &= b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \dots + b_m \cdot x^m, & (b_m \neq 0) \end{aligned}$$

Si $P = 0$ o $\text{gr}(P) < \text{gr}(Q)$ bastará tomar $C=0$ y $R=P$, pues podemos escribir $P = Q \cdot 0 + P$ y verifican ambas condiciones.

Ejemplo 2.13: Sean $P = -4x^3 - 6 + 5x$ y $Q = 2x - 3$

Para efectuar la división de los polinomios deben estar ordenados según las potencias decrecientes de x y el polinomio dividendo debe estar completo.

$P = -4x^3 + 0x^2 + 5x - 6$ ordenado y completo

$Q = 2x - 3$ ordenado

Para efectuar la división de P por Q adoptaremos la siguiente disposición práctica:

$-4x^3 + 0x^2 + 5x - 6$	$2x - 3$
$+4x^3 - 6x^2$	$-2x^2 - 3x - 2$
$-6x^2 + 5x - 6$	
$+6x^2 - 9x$	
$-4x - 6$	
$+4x - 6$	
-12	

Luego:

El cociente $C = -2x^2 - 3x - 2$ y el resto $R = -12$

Si el dividendo es un polinomio de grado n y el divisor es de la forma $x - a$, el cociente es un polinomio de grado $n - 1$, con el mismo coeficiente principal que el dividendo, el resto es un polinomio nulo o un polinomio constante.

Ejemplo 2.14: Sean $P = 5x^3 - 14x + 3$ y $Q = x - 2$

$P = 5x^3 + 0x^2 - 14x + 3$ ordenado y completo

$Q = x - 2$ ordenado

$$\begin{array}{r|l}
 5x^3 + 0x^2 - 14x + 3 & x - 2 \\
 -5x^3 + 10x^2 & 5x^2 + 10x + 6 \\
 \hline
 10x^2 - 14x + 3 & \\
 -10x^2 + 20x & \\
 \hline
 6x + 3 & \\
 -6x + 12 & \\
 \hline
 15 &
 \end{array}$$

Luego:

El cociente $C = 5x^2 + 10x + 6$ y el resto $R = 15$

En este caso el esquema se puede simplificar aplicando la “regla de Ruffini”

En el ejemplo anterior, escribiendo solo los coeficientes:

$$\begin{array}{r|l}
 5 + 0 - 14 + 3 & 1 - 2 \\
 -5 + 10 & 5 \quad 10 \quad 6 \\
 \hline
 10 - 14 & \\
 -10 + 20 & \\
 \hline
 6 + 3 & \\
 -6 + 12 & \\
 \hline
 15 &
 \end{array}$$

Omitimos aquellos coeficientes que son evidentes repeticiones; el primer término en las líneas 2^a, 4^a, 6^a, y el segundo término en las líneas 3^a, 5^a, 7^a, comprimimos los términos restantes y escribimos el primer coeficiente, 5, en la tercera línea y observamos que el 1 del divisor puede omitirse, nos queda

$$\begin{array}{r|l}
 5 \quad 0 \quad -14 \quad 3 & -2 \\
 -10 \quad -20 \quad -12 & \\
 \hline
 5 \quad 10 \quad 6 \quad 15 &
 \end{array}$$

Los coeficientes del cociente también se omiten puesto que aparecen como los primeros tres coeficientes en la tercera línea, en tanto que el resto, 15, aparece como el último número.

El último paso de simplificación es reemplazar las sustracciones por sumas, esto es, cambiar los signos del divisor (-2 por 2) y en la segunda línea. Así

$$\begin{array}{r|l}
 5 \quad 0 \quad -14 \quad 3 & 2 \\
 10 \quad 20 \quad 12 & \\
 \hline
 5 \quad 10 \quad 6 \quad 15 &
 \end{array}$$

Esta disposición representa la división abreviada de $5x^3 - 14x + 3$ por $x - 2$. Da como cociente $5x^2 + 10x + 6$ y como resto, 15.

Resumamos el proceso de división abreviada:

- 1) Para dividir un polinomio P por un binomio $(x - a)$, dispóngase en una línea (en orden de potencias descendentes) los coeficientes de P, colocando cero como coeficiente de toda potencia de x que falte y escríbase a a la izquierda.
- 2) Bájese el primer coeficiente de P al primer lugar de la tercera línea.
- 3) Multiplíquese este primer coeficiente por a , escribiendo el producto en la segunda línea, bajo el segundo coeficiente de P. La suma de este producto y el segundo coeficiente se coloca en la tercera línea.

- 4) Multiplíquese esta suma por a , súmese el producto al coeficiente siguiente de x , escribiendo otra vez la nueva suma en la tercera línea y así, sucesivamente, hasta sumar un producto al último coeficiente de P .
- 5) La última suma en la tercera línea es el resto. Los números que preceden a esta representan los coeficientes de las potencias de x , dispuestas en orden decrecientes.
- 6) El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al de P .

Ejemplo 2.15: Mediante división abreviada, determínese el cociente y el resto de

$$P = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6 \text{ dividido por } Q = x + 3$$

En este ejemplo $x - a = x - (-3)$, de modo que $a = -3$

	2	+3	-4	+5	+6
$a = -3$		-6	+9	-15	+30
	2	-3	5	-10	36

El cociente es entonces $C = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 10$ y el resto $R = 36$

2.3.1. Divisibilidad

Sean P y Q polinomios, $Q \neq 0$. En el caso particular en que el resto de la división de P por Q es 0 decimos que la división es exacta, o que P es un múltiplo de Q , o Q es un factor de P , o bien que Q divide a P .

Decir entonces que Q divide a P es expresar que existe un polinomio (necesariamente único) T tal que $P=Q \cdot T$. Al polinomio T se lo suele representar por $T=P/Q$.

Ejemplo 2.16: $Q = x - 2$ divide a $P = x^2 - 5x + 6$ pues

$$P = x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Propiedades:

1. Q divide a P si y solo si el resto de dividir P por Q es igual a cero. Por supuesto, suponemos $Q \neq 0$. Si Q divide a P , existe T tal que $P=Q \cdot T$. Llamando C al cociente y R al resto de la división de P por Q , valen las expresiones: $P = Q \cdot T + 0$ y $P = Q \cdot C + R$. Por unicidad de cociente y resto resulta que $T=C$ y $R=0$.
Recíprocamente, si el resto es cero, se tiene $P=Q \cdot T+0$, o sea $P=Q \cdot T$, luego Q divide a P .
Obsérvese que esta propiedad nos brinda la posibilidad de poder decidir, mediante un simple cálculo, si un polinomio divide a otro.

Ejemplo 2.17: si $P = 2x^3 + 3x - 1$ y $Q = x + 1$, Q no divide a P , pues el resto de dividir P por Q es -6 (verifíquelo).

2. El polinomio 0 es múltiplo de cualquier P , $0=P \cdot 0$
3. Todo polinomio P es múltiplo de sí mismo pues $P=P \cdot 1$
4. Si a es un número real distinto de cero y P es un polinomio, entonces a divide a P . En efecto, por razones de grado, el resto de dividir P por a debe ser cero. Más directamente, si $P = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$, podemos escribir

$$P = a \cdot \left(\frac{a_0}{a} + \frac{a_1}{a} x + \dots + \frac{a_n}{a} x^n \right)$$

5. Si Q divide a P y P es distinto de 0, entonces $\text{gr}(Q) \leq \text{gr}(P)$. Por hipótesis podemos expresar $P=Q \cdot T$, luego tomando grados tenemos que:

$$gr(P) = gr(Q) + gr(T) \geq gr(Q)$$

2.3.2. Especialización, valuación o valor numérico de un polinomio

Sea “a” un número y P un polinomio de la forma $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$. Se llama especialización, valuación o valor numérico de P en a, al número

$$P(a) = a_0 + a_1 \cdot a + a_2 \cdot a^2 + \dots + a_n \cdot a^n$$

Vale decir al número que se obtiene reemplazando la independiente x por a, y efectuando las operaciones indicadas.

Ejemplo 2.18: Sea $P = 5 + 2x - x^2 + 6x^3 - 7x^4$. Entonces:

$$P(1) = 5 + 2 \cdot 1 - 1^2 + 6 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^4 = 5$$

$$P(-2) = -163$$

$$P(0) = 5$$

Ejemplo 2.19: Si $P = cx^0$, entonces $P(a) = c$ para todo número real a.

Se verifican las siguientes propiedades:

$$1. \quad (P + Q)(a) = P(a) + Q(a)$$

$$2. \quad (P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$$

2.3.3. Teorema del resto

Sea a un número y P un polinomio. Entonces el valor numérico de P en a, $P(a)$, es igual al resto de dividir P por $x - a$.

Aplicando el algoritmo de división, escribimos: $P = (x - a) \cdot Q + R$ donde Q es el cociente y R es el resto. Considerando el valor numérico del polinomio P en a, tenemos

$$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R(a) = 0 \cdot Q(a) + R = R$$

Ya que, como $x - a$ es un polinomio de grado uno, el resto R es cero o bien un polinomio de grado cero, o sea en cualquier caso es un número real.

Ejemplo 2.20: el resto de dividir $x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ por $x - 2$ es $P(2) = 7$.

Ejemplo 2.21: el resto de dividir $3x^4 - 6x^2 + 4x + 8$ por $x + 1$ es $P(-1) = 1$.

2.4. Raíz de un polinomio

Sea a un polinomio real y P un polinomio. Decimos que a es raíz (o cero) de P si $P(a)=0$. Diremos que en ese caso P se anula en a.

Ejemplo 2.22: 2 y 3 son raíces o ceros del polinomio $P = x^2 - 5x + 6$

Ejemplo 2.23: -1 es raíz de $P = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

2.4.1. Corolario del teorema del resto

Un número “a” es raíz de un polinomio P si y solo si $x - a$ divide a P.

En efecto, por el teorema del resto, $P(a)$ es el resto de dividir P por $x - a$. Luego si a es raíz, o sea, si $P(a) = 0$, el resto de dividir P por $x - a$ es cero, luego $x - a$ divide a P .

Ejemplo 2.24: 1 es raíz del polinomio $P = x^2 - 3x + 2$ pues $P(1) = 0$ o equivalentemente $x - 1$ divide a P , $P = (x - 1)(x - 2)$

2.4.2. Orden de multiplicidad de una raíz

Diremos que un número a es raíz con orden de multiplicidad m de un polinomio P , si $(x - a)^m$ divide a P , y $(x - a)^{m+1}$ no lo divide.
Las raíces de orden de multiplicidad “1” son las raíces simples. Las raíces de orden de multiplicidad “2” son las raíces dobles, las raíces de orden de multiplicidad “3” son las raíces triples, etc.

Ejemplo 2.25: sea $P = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)^3(x - 1)$ Decimos que -2 es raíz triple y 1 es raíz simple de P .

A fin de determinar el número de raíces que tiene un polinomio de grado $n \geq 1$ enunciaremos el siguiente teorema: “**Todo polinomio de grado $n \geq 1$ admite por lo menos una raíz compleja**”.

Si convenimos en contar cada raíz por su orden de multiplicidad, esto es, cada raíz simple como una raíz, cada raíz doble como dos raíces, cada triple como tres, etc., del teorema anterior se deduce el siguiente: “**Todo polinomio de grado $n \geq 1$ admite exactamente n raíces complejas.**”

Observaciones:

1. Si a es una raíz de un polinomio P resulta $P = (x - a) \cdot Q$ y considerando el valor numérico de P en un número b , $P(b) = (b - a) \cdot Q(b)$.

De aquí deducimos que toda raíz de Q es raíz de P , y que toda raíz de P distinta de a es raíz de Q . Es decir que, conocida una raíz, el problema será calcular las raíces del cociente, con la ventaja de que este es de menor grado.

2. Si P es un polinomio, determinada una de sus raíces, es conveniente estudiar su orden de multiplicidad.

Ejemplo 2.26: Sea $P = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$ y sabiendo que -2 es raíz de P , determinar su orden de multiplicidad.

	1	5	6	-4	-8
-2		-2	-6	0	8
	1	3	0	-4	0

Es entonces $P = (x + 2) \cdot (x^3 + 3x^2 - 4)$ y $Q_1 = x^3 + 3x^2 - 4$

Verificamos si $(x + 2)$ divide a Q_1 :

	1	3	0	-4
-2		-2	-2	4
	1	1	-2	0

$P = (x + 2)^2 \cdot (x^2 + x - 2)$ y $Q_2 = x^2 + x - 2$

Verificamos si $(x + 2)$ divide a Q_2 :

	1	1	-2
--	---	---	----

-2	-2	2
1	-1	0

$$P = (x + 2)^3 \cdot (x - 1) \text{ y } Q_3 = x - 1$$

Como $(x + 2)$ no divide a Q_3 , el orden de multiplicidad de la raíz -2 resulta $m=3$, es decir que -2 es una raíz triple de P.

3. Sea $P = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$ y $x_1, x_2, \dots, x_n$ sus n raíces, entonces podemos escribir P como: $P = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$

En el ejemplo 2.26: $P = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)^3 \cdot (x - 1)$ con $a_n = 1$.

2.4.3. Fórmula de Bhaskara.

Un caso especial para calcular las raíces de un polinomio se presenta cuando el polinomio P es de grado 2, es decir, es de la forma: $P(x) = ax^2 + bx + c$. En este caso, las raíces pueden hallarse mediante la famosa “fórmula de Bhaskara”. (Su justificación se verá en el capítulo 4). La fórmula para hallar las raíces es:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Esto debe entenderse del siguiente modo:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

consiste en identificar correctamente los coeficientes y luego aplicar

Ejemplo 2.27: Sea $P(x) = x^2 + x - 6$, hallemos sus raíces.

Primero debemos identificar los coeficientes: $a = 1$, $b = 1$, y $c = -6$. Ahora, aplicamos la fórmula de Bhaskara con esos valores:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

Y ahora identificamos a cada raíz:

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Hemos encontrado que el polinomio $P(x)$ tiene raíces 2 y -3, por lo que podremos factorizarlo de la siguiente forma:

$$P(x) = x^2 + x - 6 = 1 \cdot (x - 2) \cdot (x - (-3))$$

$$P(x) = (x - 2) \cdot (x + 3)$$

Ejemplo 2.28: Sea $P(x) = 2x^2 - 4x - 6$, hallemos sus raíces.

Primero debemos identificar los coeficientes: $a = 2$, $b = -4$, y $c = -6$. Ahora, aplicamos la fórmula de Bhaskara con esos valores:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{4 \pm 8}{4}$$

Y ahora identificamos a cada raíz:

$$x_1 = \frac{4+8}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{4-8}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Hemos encontrado que el polinomio $P(x)$ tiene raíces 3 y -1 , por lo que podremos factorizarlo:

$$P(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2 \cdot (x-3) \cdot (x-(-1))$$

$$P(x) = 2 \cdot (x-3) \cdot (x+1)$$

En ambos ejemplos, hemos encontrado que los polinomios poseían raíces simples, es decir: de multiplicidad 1. Veamos un caso más.

Ejemplo 2.29: Sea $P(x) = 2x^2 - 12x + 18$, hallemos sus raíces.

Procedemos como en los ejemplos anteriores, identificando los coeficientes: $a = 2$, $b = -12$, y $c = 18$. Ahora, aplicamos la fórmula de Bhaskara:

$$x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{4} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{12 \pm 0}{4}$$

Esto significa que las dos raíces **son iguales**:

$$x_1 = \frac{12+0}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{12-0}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Entonces, el polinomio $P(x) = 2x^2 - 12x + 18$ posee una única raíz, de multiplicidad 2. Por lo tanto, su forma factorizada queda:

$$P(x) = 2x^2 - 12x + 18 = 2 \cdot (x-3) \cdot (x-3)$$

$$P(x) = 2 \cdot (x-3)^2$$

2.5. Descomposición factorial de un polinomio. Casos de factoreo.

Factorizar un polinomio $P(x)$ significa transformarlo en el producto de una constante por uno o más polinomios primos de coeficiente principal igual a uno. Veremos a continuación algunos casos sencillos de factorización:

2.5.1. Extracción de factor común

$$1. \quad A \cdot M + B \cdot M = M \cdot (A + B)$$

$$2. \quad A \cdot P + B \cdot P + A \cdot Q + B \cdot Q = P \cdot (A + B) + Q \cdot (A + B) = (A + B) \cdot (P + Q)$$

Ejemplo 2.30: Sea $P(x) = 2x^2 - 2x + 8$. Extrayendo factor común nos queda:

$$P(x) = 2(x^2 - x + 4)$$

Ejemplo 2.31: Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$. Extrayendo factor común entre los dos primeros términos y entre los dos segundos obtenemos:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = x^2(x-3) + 2(x-3)$$

Observemos que los factores entre paréntesis son iguales, por lo que volveremos a extraer factor común:

$$P(x) = x^2(x-3) + 2(x-3) = (x-3)(x^2+2)$$

$$P(x) = (x-3)(x^2+2)$$

Hemos obtenido la expresión factorizada.

2.5.2. Diferencia de cuadrados

$$X^2 - Y^2 = (X + Y) \cdot (X - Y)$$

Ejemplo 2.32: Sea $P(x) = 4x^2 - 9$. En este caso, debemos identificar los factores que están elevados al cuadrado:

$$P(x) = 4x^2 - 9 = 2^2 x^2 - 3^2 = (2x)^2 - 3^2$$

Entonces, los factores que debemos usar son $2x$ y 3 , obteniendo:

$$P(x) = (2x)^2 - 3^2$$

$$P(x) = (2x-3)(2x+3)$$

2.5.3. Trinomio cuadrado perfecto

$$X^2 + 2 \cdot X \cdot a + a^2 = (X + a)^2$$

$$X^2 - 2 \cdot X \cdot a + a^2 = (X - a)^2$$

Ejemplo 2.33: Sea $P(x) = x^2 + 10x + 25$. En esta situación, es bueno identificar primero los términos que corresponden a los cuadrados:

$$P(x) = x^2 + 10x + 25 = x^2 + 10x + 25 = (x)^2 + 10x + (5)^2$$

Luego comprobar que el término con x cumpla con ser el producto de ambos, por 2:

$$10x = 2 \cdot 5 \cdot x$$

Al verificarse todas las condiciones, el polinomio corresponde a un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza como:

$$P(x) = x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$$

Ejemplo 2.34: Sea $P(x) = x^2 + 8x + 25$. De nuevo, debemos identificar los factores que están elevados al cuadrado:

$$P(x) = x^2 + 8x + 25 = x^2 + 8x + 25 = (x)^2 + 8x + (5)^2$$

Luego comprobar que el término con x cumpla con ser el producto de ambos, por 2:

$$8x = 2 \cdot 4 \cdot x$$

En este caso, al **no** verificarse todas las condiciones, el polinomio **no** corresponde a un trinomio cuadrado perfecto y **no** puede factorizarse como tal.

Ejemplo 2.35: Sea $P(x) = x^2 - 6x + 9$. Identificamos los términos que corresponden a los cuadrados:

$$P(x) = x^2 - 6x + 9 = x^2 - 6x + 9 = (x)^2 - 6x + (3)^2$$

Luego comprobar que el término con x cumpla con ser el producto de ambos, por 2:

$$-6x = -2 \cdot 3 \cdot x$$

Al verificarse todas las condiciones, el polinomio corresponde a un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza como:

$$P(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

2.5.4. Cuatrinomio cubo perfecto

$$X^3 + 3 \cdot X^2 \cdot Y + 3 \cdot X \cdot Y^2 + Y^3 = (X + Y)^3$$

$$X^3 - 3 \cdot X^2 \cdot Y + 3 \cdot X \cdot Y^2 - Y^3 = (X - Y)^3$$

Ejemplo 2.36: Sea $P(x) = x^3 + 9x^2 + 18x + 27$. En este caso, debemos identificar los factores que están elevados al cubo:

$$P(x) = x^3 + 9x^2 + 18x + 27 = x^3 + 9x^2 + 18x + 3^3$$

Es decir: x y 3 . Ahora, debemos comprobar que se encuentren los otros factores, respetando las potencias correspondientes:

$$P(x) = x^3 + 9x^2 + 18x + 3^3$$

$$9x^2 = 3 \cdot 3 \cdot x^2$$

$$18x = 3 \cdot 9 \cdot x = 3 \cdot 3^2 \cdot x$$

Entonces, comprobamos que se cumplen las condiciones, y el polinomio puede ser factorizado como:

$$P(x) = x^3 + 9x^2 + 18x + 27 = (x + 3)^3$$

Ejemplo 2.37: Sea $P(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 27$. En este caso, debemos identificar los factores que están elevados al cubo:

$$P(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 27 = x^3 + 9x^2 + 15x + 3^3$$

Ahora, debemos comprobar que se encuentren los otros factores, respetando las potencias correspondientes:

$$P(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 3^3$$

$$9x^2 = 3 \cdot 3 \cdot x^2$$

$$15x = 3 \cdot 5 \cdot x$$

El tercer término **no** cumple con la condición requerida, por lo que el polinomio **no** puede ser factorizado como cuatrinomio cubo perfecto.

Ejemplo 2.38: Sea $P(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 27$. En este caso, debemos identificar los factores que están elevados al cubo:

$$P(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 27 = x^3 - 9x^2 + 18x - 3^3$$

Es importante notar que los factores son x y -3 en este ejemplo. Ahora, debemos comprobar que se encuentren los otros factores, respetando **las potencias y signos** correspondientes:

$$P(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 3^3$$

$$-9x^2 = 3 \cdot (-3) \cdot x^2$$

$$18x = 3 \cdot 9 \cdot x = 3 \cdot (-3)^2 \cdot x$$

Entonces, comprobamos que se cumplen las condiciones, y el polinomio puede ser factorizado como:

$$P(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 27 = (x - 3)^3$$

Ejercitación del Capítulo 2

Ejercicio 2.1) En los siguientes ejercicios efectuar las operaciones indicadas

a) $(x^4 + 3x^2 - x - 5) + (x^3 - 7x^2 + 9x - 12)$

Rta: $x^4 + x^3 - 4x^2 + 8x - 17$

b) $(2x^3 + 3x^2 - 7x + 5) - (4x^3 - 5x^2 + 3x - 3)$

Rta: $-2x^3 + 8x^2 - 10x + 8$

c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3}x + \frac{1}{5}x^2\right) + \left(\frac{7}{2} - \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x^2\right)$

Rta: $4 + x + x^2$

d) $3 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 2x - 7)$

Rta: $6x^3 - 9x^2 + 6x - 21$

e) $\frac{1}{2}(x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 2x + 8) - \frac{1}{3}(9x^3 - 6x^2 + 12x + 3)$

Rta: $\frac{1}{2}x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 4x + 3$

f) $(2x - 3) \cdot (3x + 5)$

Rta: $6x^2 + x - 15$

g) $(2x^3 + 2x^2 - 4x + 6) \cdot (-5x^3 + 4x^2 - 2x - 1)$

Rta: $-10x^6 - 2x^5 + 24x^4 - 52x^3 + 30x^2 - 8x - 6$

h) $7(-x^2 + 5x) + 5(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) \cdot (x - 2) - 3(x^2 - 1) \cdot (x + 1)$

Rta: $5x^4 - 23x^3 + 20x^2 + 13x + 13$

i) $(6x^3 + x^2 - 1) - (2x^3 - 3x^2 - 4) - (-4x^2 - 7x + 1)$

Rta: $4x^3 + 8x^2 + 7x + 2$

j) $3x + 2 + x\{4x + 3[2 - 5x(x + 1) - x] - 4x\} + 2 - x$

Rta: $-15x^3 - 18x^2 + 8x + 4$

k) $(2x - 7y) \cdot (2x + 7y)$

Rta: $4x^2 - 49y^2$

l) $(3x^2 + 2y^3) \cdot (3x^2 - 2y^3)$

Rta: $9x^4 - 4y^6$

m) $(x^3 - 3x^2 - 2x + 1) \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x - 1)$

Rta: $x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 4x^2 + 4x - 1$

n) $\frac{(11x^4)^0(12x^0)}{6x}$

Rta: $\frac{2}{x}$

o) $\frac{(5x^2)^4(4x^4)^2}{(2x^8)^3}$

Rta: $\frac{1250}{x^8}$

p) $\frac{14x^8y^4 - 10x^6y^5}{2x^4y^4}$

Rta: $7x^4 - 5x^2y$

q) $4x^3(3x^2y - 6xy^4)$

Rta: $12x^5y - 24x^4y^4$

r) $-x^8y^7(x^7y^{11} - x^6y^9)$

Rta: $-x^{15}y^{18} + x^{14}y^{16}$

Ejercicio 2.2) En los siguientes ejercicios calcular el cociente y el resto de la división de P por Q.

a) $P = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4; Q = x^3 - 2x + 1$

Rta: $C = x - 2; R = -x^2 - 2$

b) $P = 2x^3 - 5x + 3; Q = x^2 - 2x + 4$

Rta: $C = 2x + 4; R = -5x - 13$

c) $P = \frac{2}{3}x^3 - 5x + 2; Q = 2 - x^2 - 3x$

Rta: $C = -\frac{2}{3}x + 2; R = \frac{7}{3}x - 2$

d) $P = 3 + 4x^5 - 2x + 7x^3; Q = \frac{1}{2} + x^3 - 2x$

Rta: $C = 4x^2 + 15; R = -2x^2 + 28x - \frac{9}{2}$

e) $P = 8x^3 + 12x^2 - 14x + 7; Q = 4x^2 + 8x - 3$

Rta: $C = 2x - 1; R = 4$

f) $P = 6x^4 + 5x^3 - x^2 + 14x + 1; Q = 2x^2 + 3x - 1$

Rta: $C = 3x^2 - 2x + 4; R = 5$

g) $P = x^4 - 14x^2 + 1; Q = x^2 - 4x + 1$

Rta: $C = x^2 + 4x + 1; R = 0$

h) $P = x^7 + x^5 + x^3 - x^2 - x - 1; Q = x^2 + x + 1$

Rta: $C = x^5 - x^4 + x^3 - 1; R = 0$

Ejercicio 2.3) En los siguientes ejercicios calcular el cociente y el resto aplicando la regla de Ruffini.

a) $P = x^4 + 5x^3 - 2x^2 - x + 5; Q = x - 2; \text{ Rta: } C = x^3 + 7x^2 + 12x + 23, R = 51$

b) $P = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 3; Q = x + 1; \text{ Rta: } C = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + 1, R = 2$

- c) $P = x^5 - 2x^2 + 3 - 6x^3 + 5x$; $Q = x - 3$; Rta: $C = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 7x + 26$, $R = 81$
- d) $P = x^3 + 5x^2 - 2x - 3$ $Q = x - 1$ Rta: $C = x^2 + 6x + 4$, $R = 1$
- e) $P = -x^3 + 7x^2 + 15x - 8$ $Q = x + 2$ Rta: $C = -x^2 + 9x - 3$, $R = -2$
- f) $P = x^4 + x^3 - 3x + 6$ $Q = x - 2$ Rta: $C = x^3 + 3x^2 + 6x + 9$, $R = 24$
- g) $P = 3x^4 - 4x^3 + x^2 - 7$ $Q = x + 1$ Rta: $C = 3x^3 - 7x^2 + 8x - 8$, $R = 1$

Ejercicio 2.4) En los siguientes ejercicios calcular $P(a)$:

- a) $P = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ $a = 2$ Rta: $P(a) = -7$
- b) $P = 8x^5 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$ $a = -1$ Rta: $P(a) = -10$
- c) $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ $a = 0$ Rta: $P(a) = a_0$

Ejercicio 2.5) Hallar el resto que se obtiene al dividir el polinomio dado por el binomio que le sigue:

- a) $x^3 - 3x^2 + 4x - 5$; $x - 2$ Rta: -1
- b) $x^3 + 3x + 5$; $x + 1$ Rta: 1
- c) $2x^3 - 7x^2 + 5x + 3$; $x - 1$ Rta: 3
- d) $2x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 6x + 2$; $x + 1$ Rta: 2

Ejercicio 2.6) En los siguientes ejercicios indicar si es exacta la división de P por $(x - a)$

- a) $P = x^4 + 2x^3 + 3x - 6$ $a = 1$ Rta: si es exacta
- b) $P = -2x^3 + 5x^2 - 3x + 2$ $a = -1$ Rta: no es exacta
- c) $P = x^3 + 3x^2 - 8x - 4$ $a = 2$ Rta: si es exacta

Ejercicio 2.7) Calcular las raíces del polinomio

$$P = x^3 - 5x^2 \quad \text{Rta: 0 doble; 5 simple}$$

Ejercicio 2.8) Mostrar que el binomio $x - a$ es un factor del polinomio dado:

- a) $2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$; $x - 1$

Solución: Aplicando Ruffini

	2	3	-6	1
1		2	5	-1
	2	5	-1	0

Como el resto es cero, decimos que la división es exacta, por lo tanto, $x - 1$ es un factor del polinomio dado

- b) $5x^4 + 8x^3 + x^2 + 2x + 4$; $x + 1$

c) $x^3 - 4ax^2 + 2a^2x + a^3$; $x - a$

d) $3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$; $x - \frac{1}{3}$

Ejercicio 2.9) Calcule el valor de k para el cual $x - a$ sea un factor del polinomio dado

a) $x^3 + 2x^2 + 4x + k$; $x + 1$ Rta: $k = 3$

Solución:

Un método es aplicando Ruffini

	1	2	4	K
-1		-1	-1	-3
	1	1	3	k-3

Luego para que $x+1$ sea un factor del polinomio dado el resto debe ser nulo hacemos

$$k - 3 = 0 \therefore k = 3$$

b) $-x^3 + 3x^2 + kx - 4$; $x - 1$ Rta: $k = 2$

c) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 3x - k$; $x - 2$ Rta: $k = -10$

Ejercicio 2.10) Determinar el valor de b para que el siguiente polinomio sea divisible por $(x - 2)$.

$$P = x^3 - bx^2 + 5x - 1 \quad \text{Rta: } b = \frac{17}{4}$$

Ejercicio 2.11) Diga cuál es el grado de la función polinómica, halle los ceros de la misma e indique cuál es su multiplicidad.

a) $f(x) = (x+4)^5 \cdot (x+2)^2 \cdot (x-3)^3$ Rta: grado=10; -4 orden 5; -2 orden 2; 3 orden 3

b) $f(x) = (3x+17)^3 \cdot (3x+12)^4$ Rta: grado=7; -17/3 orden 3; -4 orden 4

Ejercicio 2.12) Determinar el polinomio de tercer grado, cuyas raíces son los números 2, -1, y 3, y el coeficiente de x^3 es el número 1. Dar la forma factorizada y la forma polinómica.

$$\text{Rta: } x^3 - 4x^2 + x + 6$$

Ejercicio 2.13) Determinar el polinomio de cuarto grado, cuyas raíces son los números 1, -1, 2 y 5 y tal que $f(0) = 6$. Dar la forma factorizada y la forma polinómica.

$$\text{Rta: } -\frac{3}{5}x^4 + \frac{21}{5}x^3 - \frac{27}{5}x^2 - \frac{21}{5}x + 6$$

Ejercicio 2.14) Determinar si el número 2 es raíz del polinomio $P = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x$.

En caso afirmativo, dar su multiplicidad y, si es posible, las demás raíces. Expresar el polinomio en forma factorizada.

Ejercicio 2.15) Calcule todos los ceros de los siguientes polinomios. Dar la forma factorizada y la forma polinómica.

- a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Un cero es -1. Rta: -1,1,2.
- b) $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$. Un cero es 1 de multiplicidad 2. Rta: 1, -1, -2
- c) $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$. Un cero es 0, otro es 1. Rta: 0,1,2,-1
- d) $P(x) = x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 17x + 6$. Un cero es 3. Rta: 3,2,1,1
- e) $P(x) = 4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2$. Un cero es 2. Rta: 2,1,1/2, -1/2

Ejercicio 2.16) Factorizar las siguientes expresiones.

- a) $14x^2 - 42xy$ Rta: $14x(x - 3y)$
- b) $3x^3 - 6x^2 + 9x$ Rta: $3x(x^2 - 2x + 3)$
- c) $9x^4 - 16x^6$ Rta: $x^4(3 + 4x)(3 - 4x)$
- d) $x^4 - 81y^4$ Rta: $(x^2 + 9y^2)(x + 3y)(x - 3y)$
- e) $x^2 - 14x + 49$ Rta: $(x - 7)^2$
- f) $12x^2 - 13x$ Rta: $x(12x - 13)$
- g) $xy - 3x + 2y - 6$ Rta: $(x + 2)(y - 3)$

Capítulo 3: Conjuntos

Objetivos

Al finalizar esta unidad usted deberá ser capaz de:

- **Operar con conjuntos.**
- **Comprender la correspondencia entre puntos de la recta y números reales.**
- **Aplicar el concepto de intervalo.**

Contenidos

- 3.1 Conjuntos y subconjuntos.
- 3.2 Operaciones con conjuntos.
- 3.3 Par ordenado. Producto cartesiano.
- 3.4 Correspondencia entre producto de la recta y números reales.
- 3.5 Pares ordenados de números reales.
- 3.6 Conjuntos de puntos. Intervalos.

Introducción

En esta unidad se considera el concepto de conjunto y sus operaciones. El producto cartesiano con la noción de par ordenado. La correspondencia entre puntos de la recta y números reales. Los intervalos, como conjuntos de puntos. Las relaciones y sus distintas representaciones. El concepto de función como caso particular de una relación y las funciones de primer grado y de segundo grado.

Orientación del aprendizaje

Lea la introducción teórica de cada tema y desarrolle personalmente los ejemplos que le siguen. Realice la ejercitación correspondiente.

Bibliografía de la unidad:

- Englebert, S., Pedemonti S., Semin, S., “Matemática 3”. AZ editora.
- De Simone, I., Turner, M., “Matemática 4”. AZ editora.
- Tapia, N., Bibiloni, A., Tapia, C., “Matemática 3” y “Matemática 4”. Editorial Estrada.

3.1. Conjuntos y subconjuntos

En lo que sigue y en la medida de lo posible, usaremos letras mayúsculas para denotar los conjuntos. Los conjuntos están formados por objetos que se acostumbra a llamar elementos o miembros y que denotaremos con letras minúsculas. Si A es un conjunto y a es un elemento del conjunto A , escribimos

$$a \in A$$

y leemos “ a pertenece a A ”

Si queremos destacar que el objeto a no es un elemento del conjunto A , escribimos

$$a \notin A$$

y leemos: “ a no pertenece a A ”

Un conjunto está bien definido cuando, dado un objeto arbitrario, puede establecerse si el mismo pertenece o no pertenece al conjunto.

Hay dos maneras muy usadas de describir un conjunto. Una es la llamada descripción por extensión que consiste en poner entre llaves todos los elementos del conjunto en cuestión.

Ejemplo 3.1: Sea el conjunto

$$A = \{a, b, c, d\}$$

Significa que el conjunto A es el formado por los elementos a, b, c, d.

Otra forma de describir un conjunto, usado principalmente cuando el conjunto tiene muchos elementos, es a la llamada descripción por comprensión, que consiste en describir un conjunto por alguna propiedad que caracteriza a sus elementos. En éste caso representaremos el conjunto en la forma

$$A = \{x/P(x)\}$$

y leemos “A es el conjunto de todos los x tales que x tiene la propiedad P”.

Ejemplo 3.2: Sea el conjunto $N = \{n/n \text{ es un número natural}\} (= \{1, 2, 3, \dots\})$

Si A y B son conjuntos y todo elemento del conjunto A es un elemento del conjunto B, escribimos $A \subset B$ y leemos “A está contenido en B” o bien “A es parte de B” o bien “B contiene a A”, ó “A es un subconjunto de B”.

La notación $A \not\subset B$ significa que A no está contenido en B y esto a su vez quiere decir, de acuerdo con la definición, que hay algún elemento de a que no es elemento de B.

Si $A \subset B$ y $B \subset A$, escribimos $A = B$ y decimos que los conjuntos A y B son iguales, es decir que tienen los mismos elementos.

Por supuesto que la notación $A \neq B$ significa a su vez que A y B no son iguales, es decir, hay algún elemento de A que no es parte de B, o algún elemento de B no es parte de A.

Si escribimos $A \subsetneq B$ queremos significar que A es parte de B y es distinto de B, esto es, todo elemento de A lo es de B pero algún elemento de B no lo es de A. Es lo mismo decir $A \subset B \wedge A \neq B$

Ejemplo 3.3: sea $A = \{n/n \text{ es natural y par}\}$.

Entonces $A \subset \mathbb{N}$ pero $A \neq \mathbb{N}$ pues todo elemento de A es, en particular, un natural pero $1 \in \mathbb{N}$ $1 \in \mathbb{N}$ y $1 \notin A$, esto dice que hay elementos de $\mathbb{N}$ que no lo son de A.

Se usa denotar con la letra griega ϕ al conjunto que no posee elementos y se lo llama **conjunto vacío**. El conjunto vacío es parte de cualquier conjunto, esto es, cualquiera sea el conjunto A se tiene $\phi \subset A$.

Se puede justificar este hecho razonando como sigue: si para algún conjunto A tuviésemos $\phi \not\subset A$, esto significaría que algún elemento de ϕ no es elemento de A, ¡pero ϕ no tiene elementos!

Hay circunstancias en las que todos los conjuntos involucrados son a su vez parte de otro conjunto que recibe el nombre de **espacio** o ambiente o **conjunto universal** y suele denotarse con la letra U. En este caso se suele llamar puntos a los elementos de universo o espacio U.

Dado el conjunto A que es parte de U, se llama **complemento de A** (respecto de U, si no está claro por el contexto) al conjunto de elementos (o puntos de U) que no están en A y se suele denotar por A^c ó A' ó CA ó $\bar{A}$.

A continuación, damos la notación y algunas relaciones para los conjuntos usuales de números.

Ya hemos introducido el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Dicho conjunto $\mathbb{N}$ es parte del conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los números enteros. Además, 0, -1, -2, -3,... son también números enteros pero no naturales. Es decir, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ pero $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$.

Tenemos también el conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los números racionales. Una descripción usual es:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x / x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Por ejemplo, son elemento de $\mathbb{Q}$ los números $\frac{1}{2}, \frac{-3}{5}, \frac{7}{8}, \frac{-13}{-26} = \frac{1}{2}$, etc.

Está claro entonces que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ pero $\mathbb{Z} \neq \mathbb{Q}$, pues, si $m \in \mathbb{Z}$, entonces $m = \frac{m}{1}$ y luego $m \in \mathbb{Q}$.

Por otra parte, $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ y $-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Por último, recordemos que ya hemos introducido el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales y ya hemos destacado que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ al mencionar la presencia de números reales irracionales.

3.2. Operaciones con conjuntos

Dados dos conjuntos A y B , se define el conjunto $A \cup B$, que llamamos **unión de A y B** al siguiente

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Esto es: el conjunto que contiene tanto los elementos de A como los elementos de B .

Además, podemos definir $A \cap B$, que llamamos **intersección de A y B** , al siguiente

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Es decir, $A \cap B$ es el conjunto formado por los elementos que tienen en común los conjuntos A y B .

Finalmente, daremos la definición de la **diferencia entre A y B** que notaremos $A - B$:

$$A - B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Esto es $A - B$ es el conjunto formado con los elementos de A que no son elementos de B .

Para visualizar las definiciones anteriores es útil valerse de los **diagramas de Venn**. En estos diagramas se simbolizan los conjuntos mediante figuras en el plano, y se destacan algunas partes de los mismos sombreándolas o rayándolas. Por ejemplo, en la Figura 3.1, la zona coloreada representa $A \cup B$.

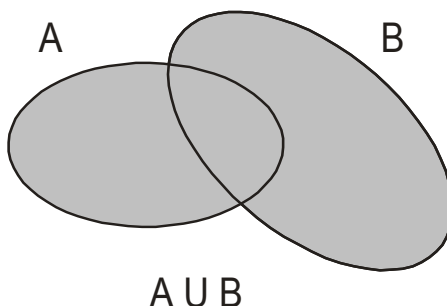


Figura 3.1. Unión entre conjuntos.

Análogamente, en la figura 3.2, la zona coloreada representa $A \cap B$.

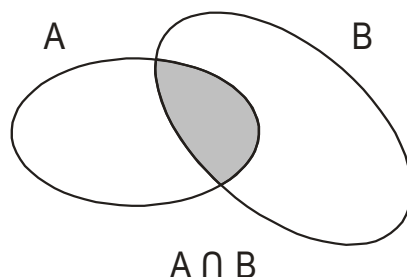


Figura 3.2. Intersección entre conjuntos.

En la figura 3.3, la zona coloreada representa $A - B$

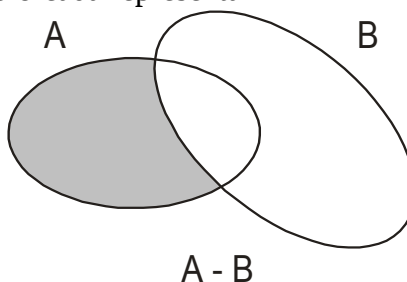


Figura 3.3. $A - B$

Resulta claro entonces que $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$, cualesquiera sean los conjuntos A y B. De la última figura resulta también claro que si elegimos convenientemente los conjuntos A y B entonces podemos lograr que

$$A - B \neq B - A$$

Es decir, las operaciones de unión e intersección de conjuntos son conmutativas, pero no así la diferencia.

Las operaciones de unión e intersección de conjuntos son además asociativas, esto es, si A, B y C son tres conjuntos, entonces

$$\text{I. } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$\text{II. } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Ambas propiedades se verifican escribiendo la definición de los distintos miembros en cuestión.

Además de verificar las propiedades I y II con las definiciones, es útil visualizarlas en un diagrama de Venn. La zona coloreada en la Figura 3.4 representa, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

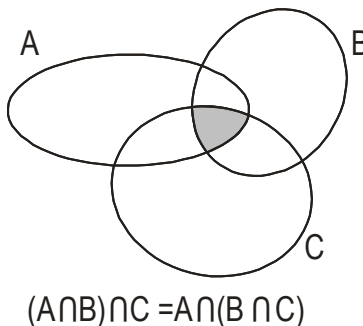
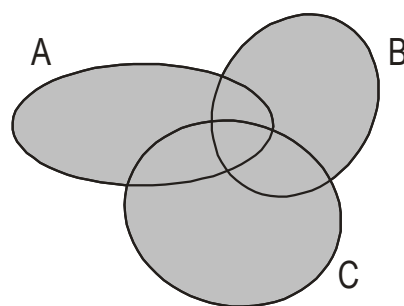


Figura 3.4. Intersección entre tres conjuntos.

La zona coloreada de la Figura 3.5 representa $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.



$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

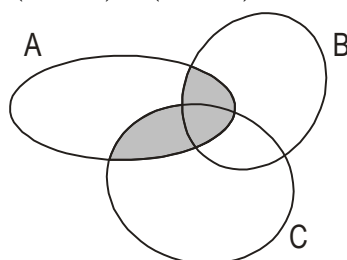
Figura 3.5. Unión entre tres conjuntos.

Algunas propiedades fáciles de verificar son:

- III. si $A \subset B$ entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$
luego $A \cap \phi = \phi$ y $A \cup \phi = A$.
- IV. $A \subset A \cup B$ y $A \cap B \subset A$.
- V. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- VI. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Las propiedades (V) y (VI) son las llamadas propiedades de distributividad de la unión respecto de la intersección, y de la intersección respecto de la unión.

Lo visualizamos con un diagrama de Venn. Por ejemplo, en la figura 3.6, la zona coloreada representa el conjunto $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.



$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Figura 3.6. Unión e intersección entre tres conjuntos.

3.3. Par ordenado, producto cartesiano

Así como no hemos definido lo que es un conjunto, no definiremos lo que es un par ordenado. Nos conformaremos con decir que un par ordenado es un objeto que denotaremos (a, b) , donde a es un elemento (de algún conjunto A) que se llama primera componente del par ordenado y b es un elemento (de algún conjunto B que puede o no ser el mismo A) que se llama segunda componente del par ordenado.

Un par ordenado (a, b) queda entonces determinado por a , b y por el orden en que ambos vienen dados. La propiedad básica a recordar es

$$(a, b) = (c, d) \text{ sí y solo si } (a = c) \text{ y } (b = d)$$

Resulta claro entonces que el par ordenado (a, b) no necesariamente es igual al par ordenado (b, a) y de allí su nombre de **ordenado**.

Dados dos conjuntos A y B se llamará **producto cartesiano de A por B** al conjunto, denotado $A \times B$, formados por todos los pares ordenados (a, b) con primera componente a en A y segunda componente b en B . En símbolos

$$A \times B = \{x / x = (a, b), a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Ejemplos de productos cartesianos

Ejemplo 3.4: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$. Entonces $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$

Por otra parte, podemos también hacer $B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\} \neq A \times B$ (entonces, el producto cartesiano de conjuntos **no** es una operación **conmutativa**).

Ejemplo 3.5: $A = \{2, t\}$. Entonces $A \times A = \{(2, 2), (2, t), (t, 2), (t, t)\}$

Nota: Se puede probar, aunque no lo haremos, que si A es un conjunto finito de m elementos y B es otro conjunto finito de n elementos, el conjunto $A \times B$ (y el conjunto $B \times A$) tiene $m \cdot n$ elementos.

3.4. Correspondencia entre puntos de la recta y números reales

Es usual pensar el conjunto de los números reales como el conjunto de puntos de una recta, estableciendo una correspondencia “uno a uno” entre ambos conjuntos. Esta correspondencia se llama “un sistema de coordenadas en la recta”.

Procedemos en la siguiente forma:

1°) Fijamos en la recta dos puntos arbitrarios, denotamos a uno de ellos (cualquiera) con el “0” y al otro con el número “1”.



Diremos que el sentido positivo de la recta es el que va de “0” a “1” (en nuestro caso “hacia la derecha”) y que el segmento de extremos “0” y “1” tiene longitud uno.

Señalaremos con el número “2” al punto de la recta situado a la derecha de “1” y tal que el segmento de extremos “1” y “2” tenga longitud uno; señalamos con el número “3” al punto de la recta situado a la derecha de “2” y tal que el segmento de extremos “2” y “3” tenga longitud uno; etc. En forma similar señalaremos a la izquierda de “0”, sucesivamente, los puntos “-1”, “-2”, “-3”... tal que los respectivos segmentos tengan longitud unitaria.

En esta forma podemos pensar que todos los números enteros están ubicados sobre la recta.



2°) La geometría elemental enseña a dividir un segmento en “ n ” partes iguales (donde “ n ” es un número natural). Esto permite ubicar sobre la recta a todos los números racionales.

Dado el número racional $\frac{m}{n}$ (que podemos suponer escrito con $n > 0$) dividimos el segmento de extremos “0” y “ m ” en “ n ” partes iguales; la marca más próxima de cero es el punto que representa al número $\frac{m}{n}$.

La figura 3.7 ilustra la forma de ubicar el punto $\frac{4}{3}$.

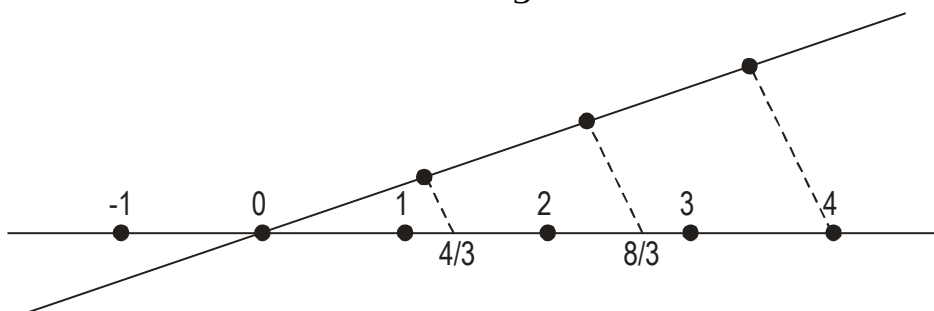


Figura 3.7. Ubicar el punto $\frac{4}{3}$ en la recta numérica.

Si A es un punto de la recta asociada al número racional m/n , este número expresa la longitud del segmento $\overline{OA}$ respecto del segmento unidad; diremos que el segmento $\overline{OA}$ es “conmensurable” con el segmento unidad elegido.

(Observación: en el capítulo 1 se desarrolló otra forma de graficar un número racional).

3°) Hace miles de años ya se descubrió que hay longitudes que no pueden expresarse como un número exacto de veces una unidad de medida. El caso más conocido es el de la diagonal de un cuadrado de lado 1: su longitud no se puede medir con exactitud usando la misma unidad que el lado. (Ver Figura 3.8)

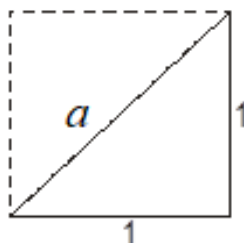


Figura 3.8. Diagonal del cuadrado de lado unidad.

Si la longitud de la diagonal se expresa por el número a debe tenerse: $a^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

Ningún número racional tiene por cuadrado al número 2

La construcción ubicada en la figura 3.9 muestra como ubicar en la recta “r” el punto A de modo tal que el segmento $\overline{OA}$ tenga la misma longitud que la diagonal del cuadrado cuyo lado es el segmento unidad.

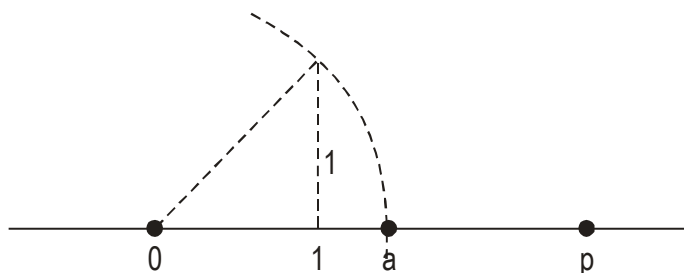


Figura 3.9. Construcción de la longitud a en la recta.

El segmento $\overline{oa}$ no es conmensurable con el segmento unidad y, por lo tanto, el punto a no está asociado a ningún número racional.

La existencia de segmentos inconmensurables con un segmento unidad elegido se traduce en el hecho de que **los números racionales no llenan la recta**.

Señalaremos sobre la recta el punto P arbitrario. Puede ocurrir que el segmento de extremos “O” y “P” sea conmensurable con el segmento unidad o no. En el primer caso, el punto P está en correspondencia con un número racional. En el segundo caso se puede mostrar (aunque no lo haremos) que el punto P está asociado a un decimal ilimitado no periódico, es decir, a un número irracional. Recíprocamente, a todo decimal ilimitado no periódico se le asocia un punto de la recta.

Resumiendo: a todo número real le corresponde un punto en la recta; a todo punto en la recta le corresponde un número real. El número real asociado a un punto de la recta se llama la “coordenada” (o la abscisa) del punto.

3.5. Pares ordenados de Números Reales

Uno de los ejemplos más importantes de producto cartesiano es $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (se usa escribir $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$), es decir el conjunto de los pares ordenados de números reales.

Este conjunto se identifica con el conjunto de puntos del plano estableciendo un sistema de coordenadas como se escribe a continuación.

Se eligen arbitrariamente, dos rectas que se cortan l_1 y l_2 . El punto de intersección se señala con "O" para ambas rectas; se eligen en cada recta otro punto que se señala con "1".

Para ubicar el punto del plano asociado al par ordenado (a, b) , se señala la recta l_1 el punto de coordenadas a y en l_2 el punto de coordenadas b ; se trazan por estos puntos paralelas a l_2 y a l_1 respectivamente; el punto P de intersección de estas paralelas es el punto asociado a (a, b) .

La figura 3.9 ilustra la ubicación del par $(3, 3)$. Recíprocamente, si P es un punto de plano, la paralela a l_2 trazado por P determina sobre l_1 un número a y a la paralela a l_1 trazado por P determina sobre l_2 un número b . Haremos corresponder el par (a, b) al punto P.

La recta l_1 se llama "1^{er} eje" o "eje de las abscisas" (o eje de las "x"); la recta l_2 se llama "2^{do} eje" o "ejes de las ordenadas" (o ejes de las "y"). Si P es el punto correspondiente al par (a, b) , el número a es la abscisa o primera coordenada de P; el número b es la ordenada o segunda coordenada de P.

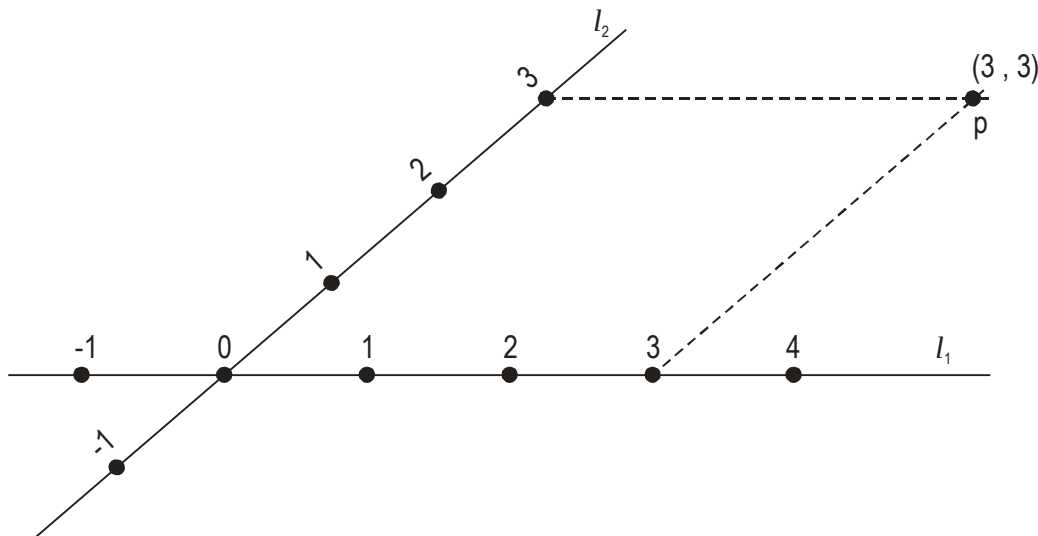


Figura 3.9. Ubicación de un punto en el plano.

Es conveniente destacar que los puntos de los ejes, en cuanto puntos del plano, quedan identificados con pares ordenados de números; los puntos del primer eje tienen segunda coordenada nula; los puntos del segundo eje tienen primera coordenada nula.

Habitualmente los ejes se toman **perpendiculares** y se adopta la misma unidad de longitud en ambos, pero estas condiciones no son necesarias para la identificación de $\mathbb{R}^2$ con el plano. Cuando se imponen las condiciones antedichas el sistema de coordenadas se llama "cartesiano".

3.6. Conjunto de puntos. Intervalos.

Los intervalos de puntos comprendidos en la recta real entre dos puntos a y b (llamados "extremos") surgen con tanta frecuencia que es conveniente disponer de nombres especiales para ellos.

- a) El conjunto de número reales formado por a , b y todos los comprendidos entre ambos recibe el nombre de INTERVALO CERRADO y lo designaremos $[a, b]$.

$$[a, b] = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ y } a \leq x \leq b\}$$

La figura 3.10 representa a $[a, b]$:



Figura 3.10. Intervalo cerrado.

- b) El conjunto de números reales comprendidos entre a y b se denomina INTERVALO ABIERTO, y se designa como $]a, b[$ o también (a, b) .

$$(a,b) =]a,b[= \{x / x \in \mathbb{R} \text{ y } a < x < b\}$$

La representación usual de $]a, b[$ suele ser:



Figura 3.11. Intervalo abierto.

En ambos casos la longitud del intervalo es el número positivo $(b - a)$.

c) Estas definiciones pueden extenderse a INTERVALOS SEMIABIERTOS o SEMICERRADOS

Semiabierto a izquierda o semicerrado a derecha:

$$(a,b] = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ y } a < x \leq b\}$$



Figura 3.12. Intervalo semiabierto.

Semiabierto a derecha o semicerrado a izquierda:

$$[a,b) = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ y } a \leq x < b\}$$



Figura 3.13. Intervalo semiabierto.

d) Finalmente, se puede generalizar considerando la semirrecta y la recta como intervalos usando los símbolos ∞ , $-\infty$. Debe tenerse mucho cuidado en estos casos, ya que estos símbolos se usan solamente por conveniencia de notación y nunca como números reales.

$$[a,\infty) = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ y } x \geq a\}$$



Figura 3.14. Intervalo infinito, cerrado en a.

$$(a,\infty) = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ y } x > a\}$$



Figura 3.15. Intervalo infinito, abierto en a.

$$(-\infty,b] = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ y } x \leq b\}$$

$$]-\infty,b] = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ y } x \leq b\}$$



Figura 3.16. Intervalo infinito, cerrado en b.

$$(-\infty,b) = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ y } x < b\}$$



Figura 3.17. Intervalo infinito, abierto en b.

$$(-\infty,\infty) = \{x / x \in \mathbb{R}\}$$



Figura 3.18. Toda la recta real.

Ejercitación del Capítulo 3

Ejercicio 3.1) Escribir las afirmaciones siguientes en notación de conjuntos:

- a) "x" no pertenece a A.
- b) R incluye a S.
- c) "d" es un elemento de E.
- d) B no incluye a A.

Ejercicio 3.2) Si $A = \{x / 2x = 10\}$ y $b = 5$, ¿es $b \in A$?

Ejercicio 3.3) Sea $N = \{r, s, t\}$. Dígase cuáles de las afirmaciones son correctas y cuáles incorrectas. En tal caso, decir por qué.

- a) $r \in N$
- b) $r \subset N$
- c) $\{r\} \in N$
- d) $\{r\} \subset N$

Ejercicio 3.4) Describir los siguientes conjuntos por comprensión:

- a) A es el conjunto de las letras a, b, c y d.
- b) $B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$
- c) $C = \{5\}$

Ejercicio 3.5) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

$\{a, b, c\}$, $\{b, a, c\}$, $\{c, b, a\}$, $\{a, c, b\}$

Ejercicio 3.6) Entre los conjuntos que siguen, ¿cuáles son diferentes?

$\emptyset$, $\{0\}$, $\{\emptyset\}$.

Ejercicio 3.7) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos?

- a) $A = \{x / x \text{ es una letra anterior a "a" en el alfabeto}\}$
- b) $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 4 \text{ y } 2x = 6\}$
- c) $C = \{x \in \mathbb{R} / x \neq x\}$
- d) $D = \{x \in \mathbb{R} / x + 4 = 4\}$

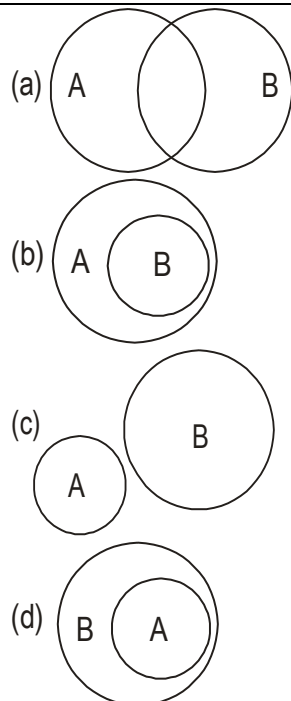
Ejercicio 3.8) Dado $A = \{a, b, c\}$, ¿cuántos subconjuntos hay en A y cuáles son?

Ejercicio 3.9) Sean $A = \{d\}$, $B = \{c, d\}$, $C = \{a, b, c\}$, $D = \{a, b\}$ y $E = \{a, b, d\}$. Establecer la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- a) $B \subset C$
- b) $B \neq E$
- c) $B \not\subset A$
- d) $E \subset B$

- e) $A \not\subset D$
- f) $E \supset C$
- g) $A \subset C$
- h) $D \not\subset E$
- i) $C = B$
- j) $B \subset D$

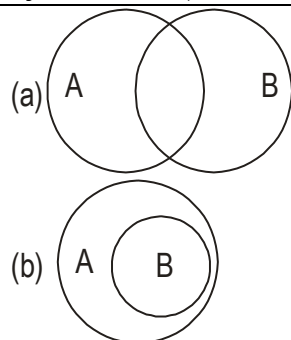
Ejercicio 3.10) En los diagramas de Venn que siguen sombrear $A \cup B$

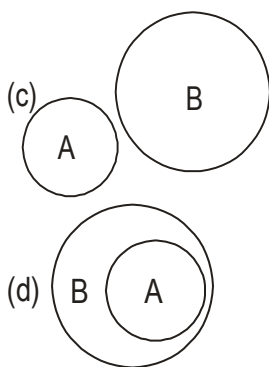


Ejercicio 3.11) Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Hallar

- a) $A \cup B$
- b) $A \cup C$
- c) $B \cup C$
- d) $B \cup B$
- e) $(A \cup B) \cup C$
- f) $A \cup (B \cup C)$

Ejercicio 3.12) En los diagramas de Venn que siguen, sombrear $A \cap B$.





Ejercicio 3.13) Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, y $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Hallar

- a) $A \cap B$
- b) $A \cap C$
- c) $B \cap C$
- d) $B \cap B$
- e) $(A \cap B) \cap C$
- f) $A \cap (B \cap C)$

Ejercicio 3.14) Sean

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es par}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / x = 6n \text{ con "n" natural}\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es múltiplo de 3}\}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- a) $B \subset A$
- b) $C \subset A$
- c) $B \subset C$
- d) $A = B$

Ejercicio 3.15) Sean

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es par}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / x = 6n \text{ con "n" natural}\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es múltiplo de 3}\}$$

Encuentre:

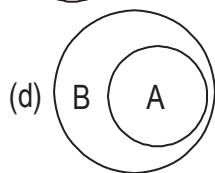
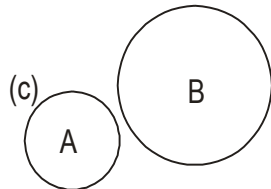
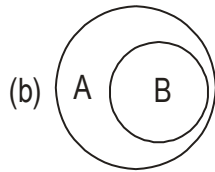
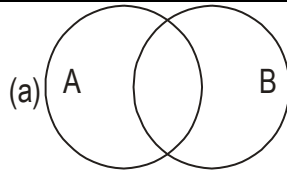
- a) $B \cap A$
- b) $C \cap A$
- c) $C \cap B$

Ejercicio 3.16) Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$

Hallar

- a) $(A - B)$ b) $(C - A)$
- c) $(B - C)$ d) $(B - A)$
- e) $(B - B)$

Ejercicio 3.17) En los diagramas de Venn que siguen, sombrear $(A - B)$



Ejercicio 3.18) Sean $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 = 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 2 = 0\}$.

Expresar el resultado de las siguientes operaciones.

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $B - A$

Ejercicio 3.19) Sean $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 = 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / 3x = 12\}$.

Expresar el resultado de las siguientes operaciones.

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $B - A$

Ejercicio 3.20) Sean $U = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$

Hallar

a) A'

b) B'

c) $(A \cap C)'$

d) $(A \cup B)'$

e) $(A')'$

f) $(B - C)'$

Ejercicio 3.21) Si en el diagrama de la figura, el área interior al rectángulo representa un conjunto A, el triángulo un conjunto B y el círculo un conjunto C, determínese el área representada por:

a) $A \cup B$

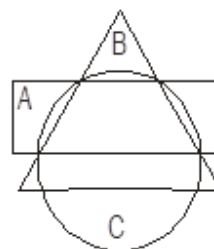
b) $A \cap B$

c) $A \cap C$

d) $B \cup C$

e) $(A \cup B) \cap C'$

f) $(A \cup B)' \cap C$



Ejercicio 3.22) Utilizando los diagramas de Venn, demuestre las siguientes relaciones.

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

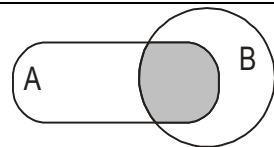
d) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

e) $A \cup B = A$ si y sólo si $B \subset A$

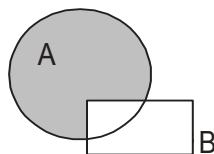
f) $A \cap B = B$ si y sólo si $B \subset A$

h) $B \subset A$ si y sólo si $A' \subset B'$

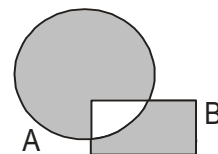
Ejercicio 3.23) Expresar la región sombreada en cada uno de los siguientes diagramas:



a)



b)



c)

Ejercicio 3.24) Determinar “a” y “b” para que los pares ordenados $(a+3, b-2)$, $(7, 4)$ sean iguales.

Ejercicio 3.25) Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4, 3\}$, expresar:

a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) $A \times A$

Ejercicio 3.26) Representar en la recta real los siguientes números: -4 ; $7/3$; $8/3$; $2,25$.

Ejercicio 3.27) Graficar en la recta real los siguientes subconjuntos:

a) $[1; 5]$ b) $]-2; 4[$ c) $[0; 5] \cup [3; 8]$ d) $[0; 5] \cap [3; 8]$
 e) $[3; 9] - [4; 5]$ f) $A = \{x/x \geq 3\}$ g) A'

Ejercicio 3.28) Sean $A = [-3; 1[$ y $B = [-1; 2]$. Se pide:

- Representar A y B sobre la misma recta real.
- Representar $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$ sobre la recta real.
- Escribir $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$ en notación de intervalos.

Ejercicio 3.29) Dibujar sobre la recta real y escribir el conjunto que resulta en notación de intervalos:

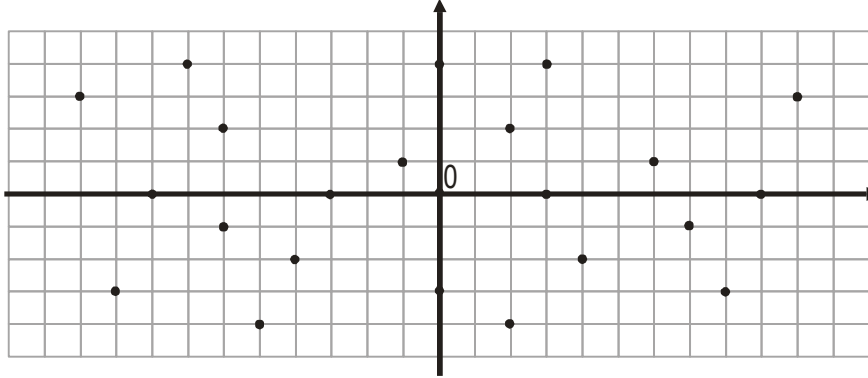
- $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\} \cap \{x \in \mathbb{R} / -3 < x < 2\}$
- $\{x \in \mathbb{R} / x < 2\} \cap \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$
- $\{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} / x < 1\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 3\}$

Ejercicio 3.30) Representar en el plano cartesiano los siguientes pares ordenados:

- a)(3, 4) b)(0, -2) c)(2, 0) d)(0, 0) e)(-3, 2)
 f)(2, -3) g)(0, 5) h)(-2, -5) i)(1, 1) j)(-1, -1)

Ejercicio 3.31) Expresar las coordenadas de los puntos marcados en la gráfica siguiente:



Ejercicio 3.32) Sean $A=[2, 6]$; $B=[3, 4]$. Representar en el plano cartesiano los conjuntos:

- a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) $A \times A$ d) $B \times B$

Ejercicio 3.33) Sean $A=\{1, 2, 3, 4\}$ y $B=\{0, 3, 5\}$. Determinar el subconjunto de $A \times B$ definido por la relación “x es menor que y”.

Ejercicio 3.34) Sean $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B=\{2, 3, 8, 9, 10\}$. Determinar el subconjunto de $A \times B$ definido por: $\{(x, y) / 'x' \text{ divide a } 'y'\}$

Capítulo 4: Funciones

Objetivos

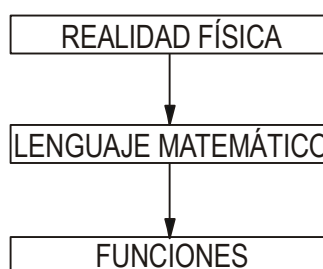
Al finalizar esta unidad usted deberá ser capaz de:

- **Aplicar el concepto de intervalo en las relaciones y funciones.**
- **Comprender el concepto de función.**
- **Utilizar las funciones de primer y segundo grado en situaciones problemáticas.**

Contenidos

- 4.1 Relación y sus representaciones.
- 4.2 Funciones. Definición.
- 4.3 Funciones enteras de primer y segundo grado.

Esquema Conceptual



Introducción

En esta unidad se considera el concepto de conjunto y sus operaciones. El producto cartesiano con la noción de par ordenado. La correspondencia entre puntos de la recta y números reales. Los intervalos, como conjuntos de puntos. Las relaciones y sus distintas representaciones. El concepto de función como caso particular de una relación y las funciones de primer grado y de segundo grado.

Orientación del aprendizaje

Lea la introducción teórica de cada tema y desarrolle personalmente los ejemplos que le siguen. Realice la ejercitación correspondiente.

Bibliografía de la unidad:

- Englebert, S., Pedemonti S., Semin, S., “Matemática 3”. AZ editora.
- De Simone, I., Turner, M., “Matemática 4”. AZ editora.
- Tapia, N., Bibiloni, A., Tapia, C., “Matemática 3” y “Matemática 4”. Editorial Estrada.

4.1. Relación y sus Representaciones

Dados dos conjuntos A y B, llamaremos **relación de A en B** a cualquier subconjunto R de $A \times B$. Si el par ordenado (a,b) está en R, diremos que **a está R-relacionado con b** y lo denotaremos aRb . En caso contrario pondremos $a \not R b$.

Ejemplo 4.1: $A = B = \mathbb{N}$; $R = \{(x, y) / x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x \text{ divide a } y\}$; esto es aRb sí y solo si a divide a b . Entonces $2R6$, $5R40$, $7 \not R 2$.

Ejemplo 4.2: $A = B = \mathbb{R}$, aRb si y sólo si $a=b$. Esta relación suele llamarse “la diagonal”.

Ejemplo 4.3: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$, $R = \{(1, x), (3, x), (3, y)\}$.

Si R es una relación de A en B , llamamos a A **conjunto de partida** y a B **conjunto de llegada** de R . Se llama **dominio** de la relación R al conjunto

$$D_R = \{a / \text{para algún } b \in B, \text{ se cumple que } (a, b) \in R\}$$

esto es, D_R es el conjunto de primeras componentes de los pares ordenados en R . Entonces,

$D_R \subset A$. Si aRb , decimos que **b es imagen de a por R** (por supuesto que entonces $a \in D_R$). Se

llama **conjunto imagen de R** o simplemente imagen de R al conjunto:

$$I_R = \{b / \text{para algún } a \in A, (a, b) \in R\}$$

es decir, imagen de R es el conjunto formado con las segundas componentes de los pares ordenados en R . Luego, si aRb , $b \in I_R$ y $a \in D_R$. Entonces $I_R \subset B$

En el caso en que los conjuntos A y B tienen pocos elementos, es útil visualizar las relaciones por una representación utilizando flechas, que por este motivo se llama **sagital**.

En el caso del ejemplo 4.3, se representaría como en la figura 4.1:

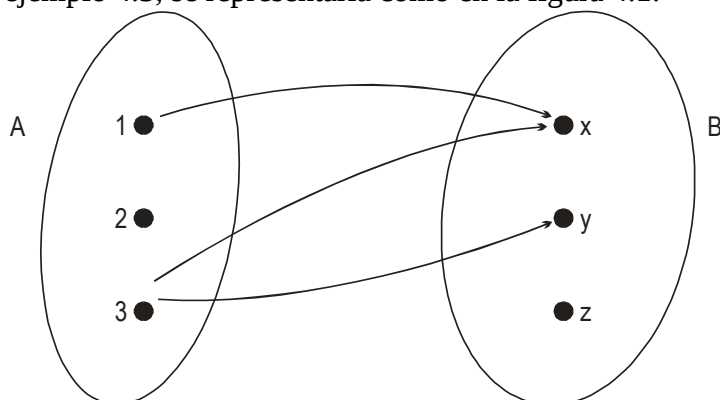


Figura 4.1. Diagrama sagital.

Es decir, las flechas empiezan en las primeras componentes de la relación y terminan en las segundas componentes respectivas.

Otra representación de la misma relación, es la **representación matricial**, que ejemplificamos a continuación (siempre en el caso del ejemplo 4.3).

	x	y	z
1	si	no	no
2	no	no	no
3	si	si	no

Cuando se trata de relaciones de los números reales en los números reales, es útil la **representación cartesiana** de la relación.

Por ejemplo, si $A=B=\mathbb{R}$ y R está definida por: aRb si y solo si $a \geq 0$ y $b \leq 0$, su representación cartesiana sería

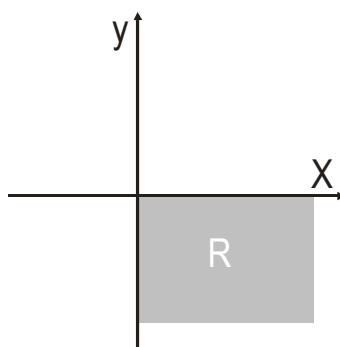


Figura 4.2. Representación cartesiana de una relación.

Es de notar que, en una relación, un punto del dominio puede tener varias imágenes, así como un punto del conjunto imagen puede ser imagen de más de un punto del dominio. Este es el caso, por ejemplo, de la relación arriba graficada.

A toda relación R de A en B , le está asociada una relación de B en A , llamada **relación inversa** y denotada R^{-1} y definida por: $aR^{-1}b$ si y solo si bRa . Está claro entonces que el dominio de R^{-1} es la imagen de R y la imagen de R^{-1} es el dominio de R . En la notación antes introducida escribimos esto en la forma:

$$D_{R^{-1}} = I_R, I_{R^{-1}} = D_R$$

Es de destacar el hecho (evidente por las definiciones) de que $(R^{-1})^{-1} = R$, o sea, la relación inversa de la relación inversa de una relación, es la misma relación.

También destaquemos el hecho de que, en el caso de relaciones de R en R , el gráfico cartesiano de la relación inversa se obtiene del de la relación original, “reflejando” éste respecto de la diagonal de $R \times R$.

Por definición, la “diagonal” o “bisectriz del primer y tercer cuadrante” es el conjunto $\{(x, y) / x \in R, y \in R, x = y\}$ como se ve en la figura 4.3:

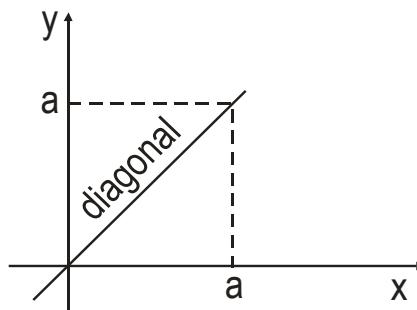


Figura 4.3. Diagonal en plano cartesiano.

Para “reflejar” un punto P en la diagonal, se procede como indica la figura 4.4. La palabra reflejar se utiliza porque en el proceso puede imaginarse a la diagonal como un espejo, siendo P' la imagen de P en ese espejo. Un punto y su imagen quedan a igual distancia de la diagonal, sobre la misma perpendicular.

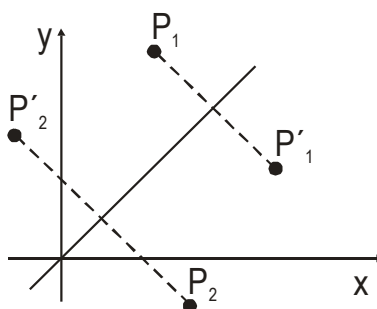


Figura 4.4. Reflejando puntos respecto a una diagonal en plano cartesiano.

4.2. Funciones. Definición.

Sean A y B conjuntos arbitrarios. Una regla que asigna a cada elemento de A un único y bien determinado elemento de B define como una **función de A en B** ; también decimos una **aplicación de A en B** o una **transformación de A en B** . El conjunto A se llama el **dominio** o conjunto de partida y el conjunto B , conjunto de llegada.

Para indicar que “ f ” es una función de A en B usaremos indistintamente las notaciones:

$$f : A \rightarrow B; A \xrightarrow{f} B$$

El diagrama en la figura 4.5 representa una función:

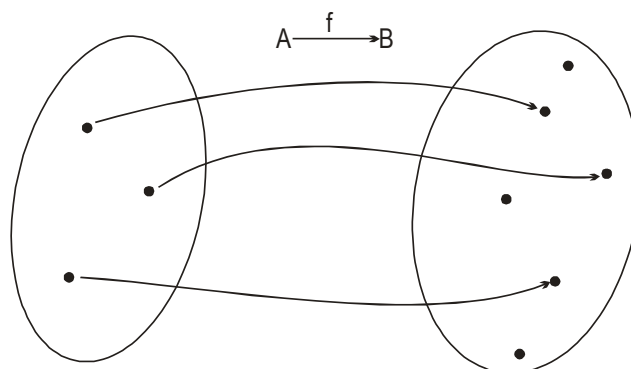
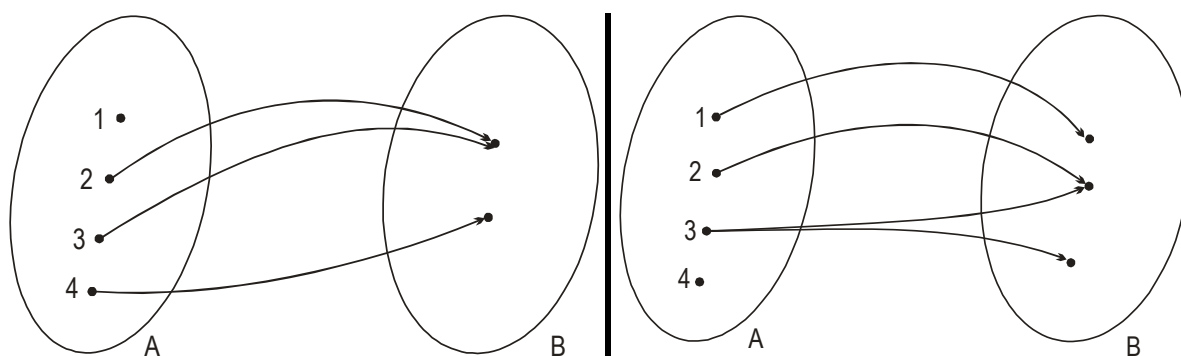


Figura 4.5. Representación de una función con diagrama sagital.

Los diagramas siguientes **no** representan funciones:



El elemento “1” del conjunto A **no** está asignado a ningún elemento de B.

El elemento “3” del conjunto A está asignado a **dos** elementos de B.

Figura 4.6. Ejemplos de relaciones que NO son funciones.

Al elemento del conjunto de llegada que la función “ f ” asigna al elemento “ a ” del conjunto de partida se lo llama la **imagen de a por f** y se lo simboliza por **$f(a)$** . También se utiliza la notación $a \rightarrow b$ para indicar $b = f(a)$.

Ejemplo 4.1. Si “ a ” es un número, el número “ $a^2 + 1$ ” está bien determinado. La asignación

$$a \rightarrow a^2 + 1$$

permite definir una función entre ciertos pares de conjuntos, como las siguientes:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$h: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$j: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

La misma asignación **no define** una función de $\left\{0, \frac{1}{2}, 2\right\}$ en $\mathbb{N}$, ¿Por qué?

La imagen de “ f ” es el subconjunto de B formado por los puntos a los cuales llega al menos una flecha.

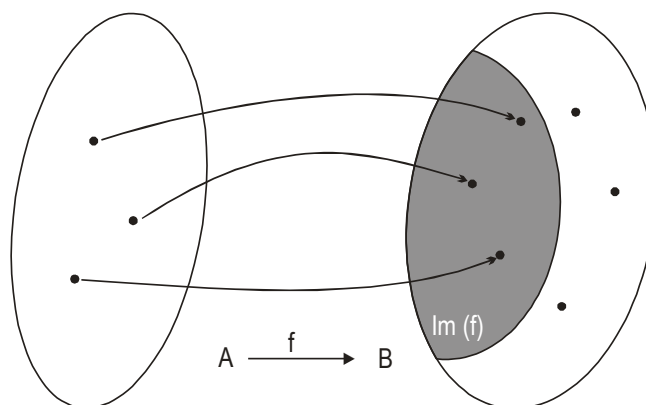


Figura 4.7. Ejemplo de imagen de una función.

Ejemplo 4.2: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 \quad Im(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$

Ejemplo 4.2: $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = \ln(x) \quad Im(g) = \mathbb{R}$
(ln representa el logaritmo natural)

Ejemplo 4.3: $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h(x) = c \quad Im(h) = \{c\}$
(esta función recibe el nombre de función Constante)

En nuestro curso estamos interesados en el estudio de un tipo particular de funciones: aquellas cuyo dominio es un conjunto A de $\mathbb{R}$ y cuyo conjunto de llegada es $\mathbb{R}$ (o un subconjunto de $\mathbb{R}$). En lo que sigue, y salvo expresa mención en contrario, cuando hablemos de funciones entenderemos que son de este tipo. Frecuentemente utilizaremos la notación:

$$y = f(x)$$

como una forma abreviada de indicar la función:

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = f(x)$$

Ejemplo 4.4: La asignación $x \mapsto 2x$ define una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, que indicamos:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = f(x) = 2x$$

En este ejemplo, la imagen del número 3 es el número 6. Entonces, escribimos: $f(3) = 6$.

Ejemplo 4.5: La asignación $x \mapsto \sqrt{x}$ no define una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Pero la misma asignación sí define una función de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (conjunto de números reales no negativos) en $\mathbb{R}$. (¿Puedes explicar por qué?)

Ejemplo 4.6: La asignación:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} - 5 & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ 8 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

define (por tramos) una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Entonces, para **definir** una función deben darse:

- el dominio.
- el conjunto de llegada.

- c. la regla o asignación que hace corresponder a cada elemento del dominio un elemento del conjunto de llegada.

En consecuencia, dos funciones f y g son **iguales** si y sólo si tiene el **mismo dominio**, el mismo **conjunto de llegada**, y, además: $f(x) = g(x)$ para todo “ x ” en el dominio.

Ejemplo 4.7: Las siguientes funciones son iguales.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad y = f(x) = \frac{2x^3 + 2x}{x^2 + 1}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad y = g(x) = 2x$$

Ejemplo 4.8: Las siguientes funciones **no** son iguales.

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad y = F(x) = x^2$$

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}; \quad y = G(x) = x^2$$

4.2.1. Imagen de una función.

Sea $f: A \rightarrow B$ una función. El conjunto de elementos de B que son imagen de algún elemento de A se llama la **Imagen (o el Rango) de la función** y se denota con el símbolo **Im(f)**.

$$\text{Im}(f) = \{b \in B / \text{existe algún } a \in A \text{ que verifica: } f(a) = b\}$$

La notación: $y = f(x)$, si bien puede dar lugar a alguna confusión (al identificar la función f con la regla que asigna a cada elemento de A un elemento de B) la utilizaremos frecuentemente por ser cómoda. Cuando la utilicemos, convendremos en que el dominio es el **mayor subconjunto de $\mathbb{R}$** para el cual **la expresión tiene sentido** y en que el conjunto de llegada es $\mathbb{R}$. En todos los demás casos, se deberá especificar cuál es el dominio y cuál la imagen o conjunto de llegada. Así, utilizaremos la notación $y = x^2$ para indicar la función: $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = F(x) = x^2$ pero **no** para indicar la función: $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}; y = G(x) = x^2$

En el estudio de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ resulta útil poder “visualizarlas”. Para ello utilizaremos la **gráfica** de la función.

Se llama **grafo** de una función f al conjunto de pares $(a; f(a))$. Estableciendo de antemano los conjuntos de partida y de llegada, toda la información referente a la función está contenida en el grafo, que especifica cuáles son los elementos que están en correspondencia.

Ejemplo 4.9: Sea la función $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad y = f(x) = 2x - 1$. El grafo de f es $G = \{(0, -1)(1, 1)(2, 3)(3, 5)\}$

Todo par ordenado de números reales puede ser representado por un punto del plano, con referencia a un sistema de coordenadas. Por lo tanto, el grafo de una función admite una representación gráfica, que llamamos **la gráfica de la función**.

Ejemplo 4.10: Sea la función $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad y = f(x) = 2x - 1$ El grafo de f es $G = \{(0, -1)(1, 1)(2, 3)(3, 5)\}$ y su gráfica es:

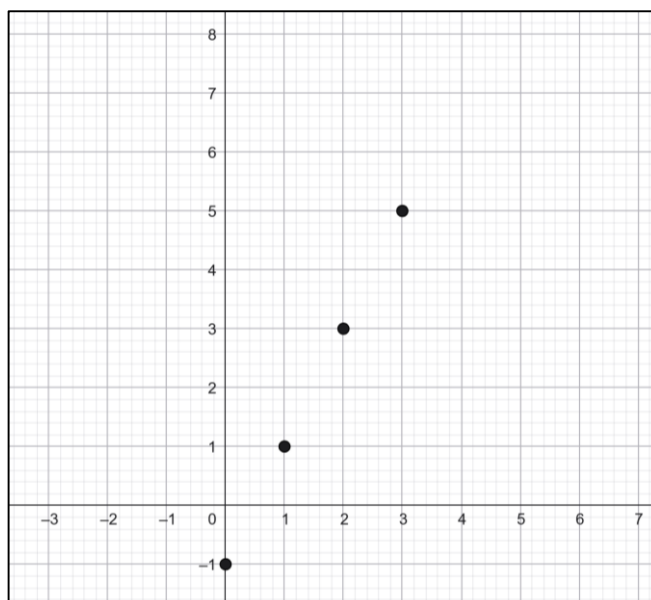


Figura 4.8. Gráfica de la función del ejemplo 4.10

4.3. Funciones enteras de primer grado y de segundo grado

4.3.1. Funciones Constantes

Sea “ c ” un número real arbitrario. La función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por la asignación:

$$f(x) = c$$

se denomina “**función constante**”. Se suele escribir, abreviadamente, $y = c$.

La representación gráfica de una función de este tipo es una recta paralela al eje de las “ x ”, la que pasa por el punto $(0, c)$.

Ejemplo 4.11: Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = f(x) = 6$. La gráfica de f es como en la figura 4.9.

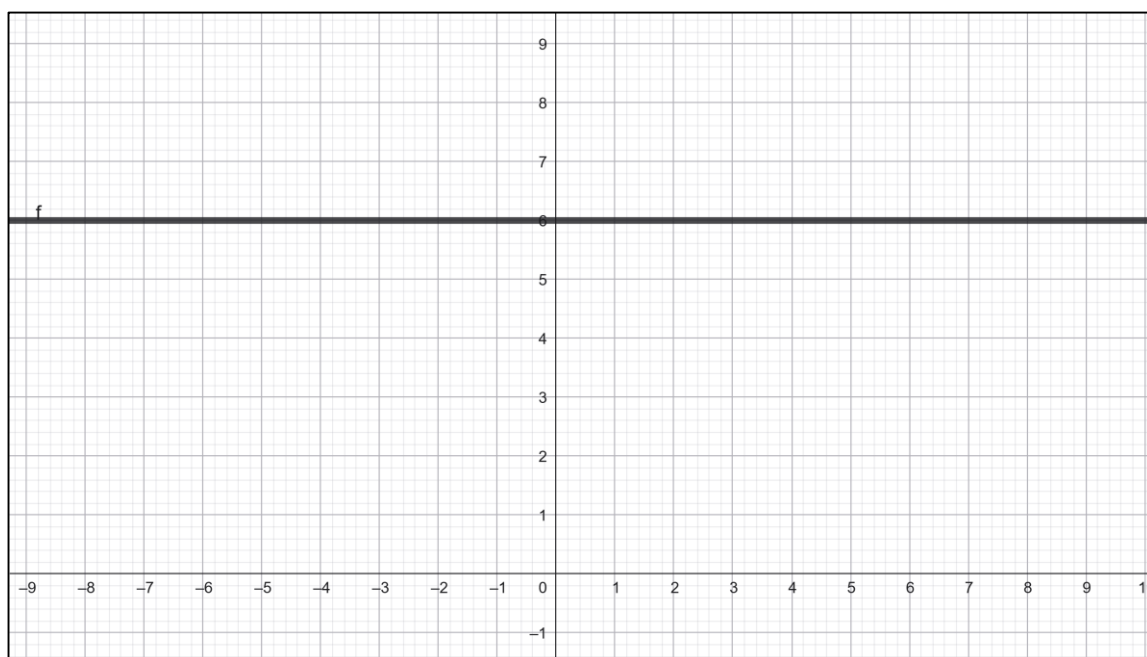


Figura 4.9. Gráfica de la función constante.

4.3.2. Funciones de primer grado.

Sean “ a ” y “ b ” números reales arbitrarios, $a \neq 0$. La función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por la asignación:

$$f(x) = ax + b$$

se llama “**función de primer grado**”. Abreviadamente, solemos escribir $y = ax + b$

Observación

Las funciones de este tipo suelen llamarse “funciones lineales”. Nosotros reservaremos este nombre para las funciones de la forma $y = ax$, es decir: para las funciones de primer grado en las que $b = 0$.

Ejemplo 4.12: Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = f(x) = x$. La gráfica de f es una recta: la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

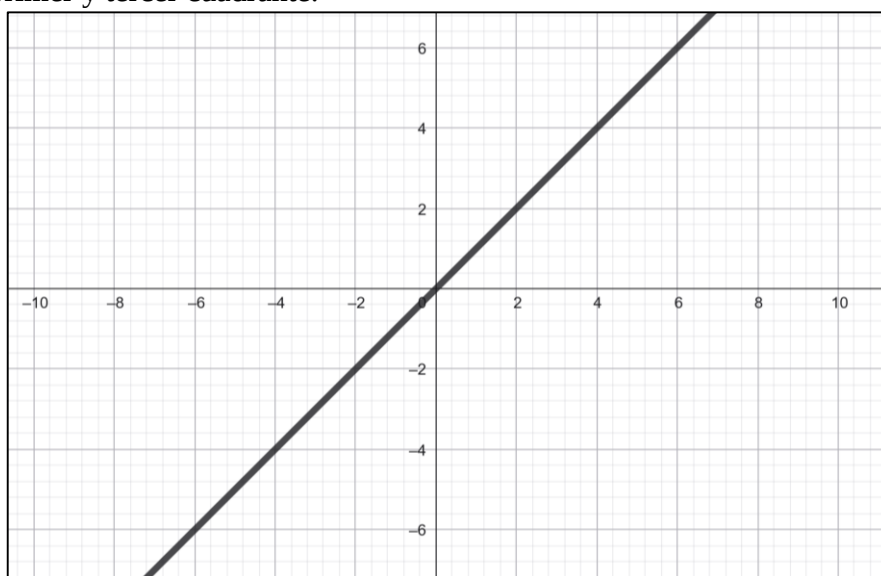


Figura 4.10. Gráfica de la función $y = x$

Estudiemos ahora un caso un poco más general: las funciones de la forma $y = ax$.

La representación gráfica de esta función es la recta “ r ” determinada por el origen $0 = (0, 0)$ y por el punto $A = (1, a)$ como en la figura 4.11. Para demostrar esto tendremos que probar:

- I) Todo punto de la recta pertenece al gráfico de la función.
- II) Todo punto que pertenece al gráfico de la función está en la recta.

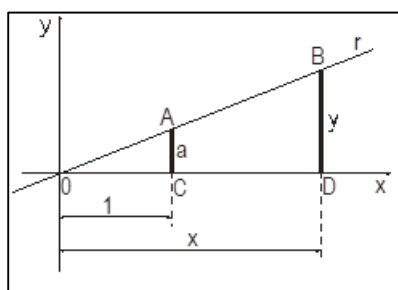


Figura 4.11. Gráfica de la función $y = ax$

I) Sea $B = (x, y) \neq (0, 0)$ un punto cualquiera de la recta. De la figura 4.11 resulta que los triángulos OAC y $OB D$ son semejantes, por tener sus ángulos iguales. Por consiguiente los lados homólogos son proporcionales;

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} \text{ luego } \frac{y}{x} = \frac{a}{1} \text{ de donde: } y = ax$$

II) Sea $P = (x_1, ax_1)$ un punto del gráfico de $y = ax$ y A el punto $(1, a)$.

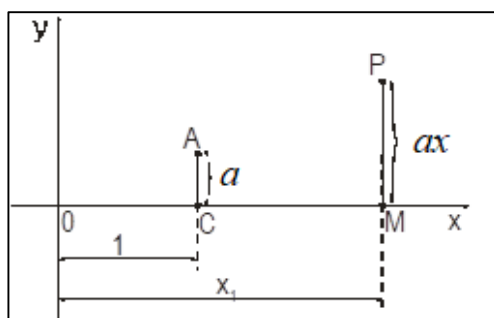


Figura 4.12

De la figura 4.12 resulta: $\frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{a}{1}$; $\frac{\overline{PM}}{\overline{OM}} = \frac{ax_1}{x_1} = \frac{a}{1}$

Los triángulos OCA y OMP son semejantes, por consiguiente, los ángulos homólogos son iguales. Como los ángulos iguales AOC y POM tienen un lado común, también el otro lado debe ser común. Por consiguiente, el punto P está en la recta determinada por O y A.

Estudiemos ahora el caso general: $y = ax + b$

Observemos que para cada “x” el valor de “y” se obtiene sumándole “b” al valor de “y”, definido por la función $y = ax$.

Por consiguiente, para obtener la representación gráfica de $y = ax + b$, basta con “trasladar” el gráfico de $y = ax$, en b unidades en la dirección del eje “y”. Podemos afirmar entonces que la representación gráfica de dicha función es la recta r' determinada por los puntos $(0, b)$ y $(1, a+b)$. Se obtendrá una gráfica como la observada en la figura 4.13.

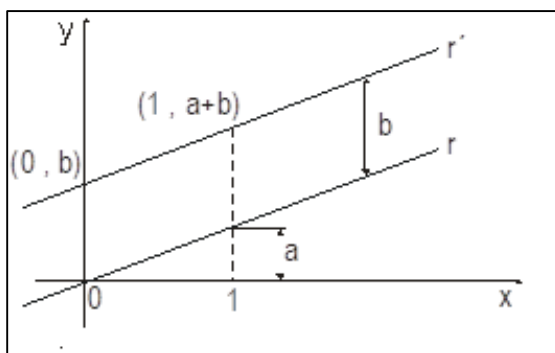


Figura 4.13. Gráfica de las funciones $y = ax$ y $y = ax + b$

Hemos probado entonces que:

La representación gráfica de toda función $y = ax + b$, es una recta.

Resulta natural preguntarse si es cierta la afirmación recíproca, esto es, si toda recta del plano es la representación gráfica de una determinada función de primer grado. La respuesta es **no**.

En efecto, consideremos el eje “y”, es decir: $\{(0, a) / a \in \mathbb{R}\}$ No existe ninguna función, de primer grado (o superior), cuya representación gráfica sea dicho eje. (¿Por qué?)

Lo mismo si consideramos cualquier recta paralela al eje “y”.

Sin embargo, **toda recta no paralela al eje “y” es la representación gráfica de una función de primer grado.**

Observaciones

Sea $y = ax + b$

1) Para poder dibujar la recta representativa basta con conocer los valores de “y” correspondientes a **dos valores distintos** de “x” (no necesitamos más eso, ¿por qué?)

2) El punto (0, b) es el punto de intersección de la recta con el eje “y”, por esta razón al número “b” se lo suele llamar la **ordenada al origen**.

3) Los puntos (0, b) y (1, a+b) son puntos de la recta. Vemos que a una variación de una unidad en la dirección del eje “x” correspondiente una variación de “a” unidades en la dirección del eje “y”. De allí el nombre de **pendiente** que se da al número “a”.

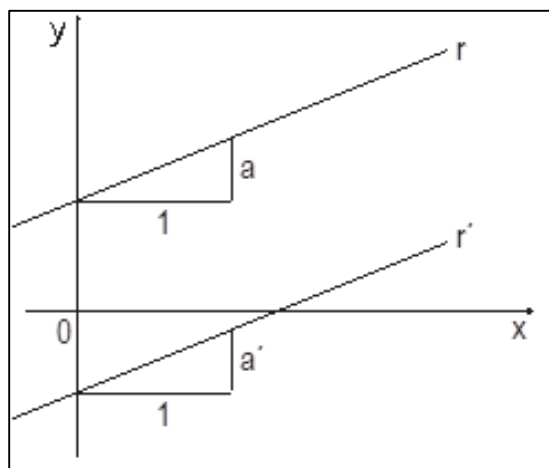


Figura 4.13. Gráfica de las funciones $y = ax$ y $y = ax + b$

Mirando la figura 4.13 podemos convencernos de que las rectas $y = ax + b$ y $y = a'x + b'$ **son paralelas** si y sólo si $a = a'$

4.3.2.1. Cálculo de la pendiente de una recta, conocidos dos puntos.

La fórmula para calcular la pendiente de una recta cuando se conocen dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

No importa el orden en que se elijan a los puntos, mientras se mantenga la consistencia. La pendiente debe su nombre a que es una medida de cuánto aumenta o disminuye la recta por unidad a medida que nos movemos a la derecha en el eje horizontal.

Si $a > 0$, la recta sube, mientras que si $a < 0$, la recta desciende. En caso de que $a = 0$, la recta es horizontal.

Ejemplo 4.13: Calculemos la pendiente de la recta que pasa por los siguientes pares de puntos:

a) $P = (1, 2)$ y $Q = (4, 8)$

Tomemos a P como el punto 1 y a Q como el punto 2, obtenemos: $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 2}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$

¿Qué ocurre si los tomamos en el otro orden? Es decir: Q como 1 y P como 2:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 8}{1 - 4} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Como vemos, es exactamente el mismo resultado. Obtenemos una pendiente positiva, es decir: la recta crece cuando los valores de x aumentan.

b) $A = (0, 1)$ y $B = (2, -5)$

Tomemos a A como el punto 1 y a B como el punto 2, obtenemos:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - 1}{2 - 0} = \frac{-6}{2} = -3$$

De nuevo, si tomamos los puntos en orden diferente (A como 2 y B como 1), debemos

$$\text{obtener el mismo resultado: } a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-5)}{0 - 2} = \frac{1 + 5}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

En este caso, obtenemos una pendiente negativa, es decir: la recta decrece cuando los valores de x aumentan.

c) $M = (1, 2)$ y $N = (4, 2)$

Tomemos a M como el punto 1 y a N como el punto 2, obtenemos:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{4 - 1} = \frac{0}{3} = 0$$

En este último caso, obtenemos una pendiente nula: la recta ni aumenta ni disminuye.

Te invitamos a que grafiques cada uno de los casos.

4.3.2.2. Cálculo de la ordenada al origen de una recta.

La ordenada al origen (también llamada intersección con el eje “ y ”) es el punto donde la recta corta al eje vertical (eje y). Es el valor de y cuando $x = 0$. Es decir, es la coordenada y del punto de la recta que tiene abscisa cero. Se representa comúnmente con la letra b (en la ecuación $y = ax + b$).

En la ecuación $y = 2x + 1$, la ordenada al origen es 1, porque $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ (Figura 4.14).

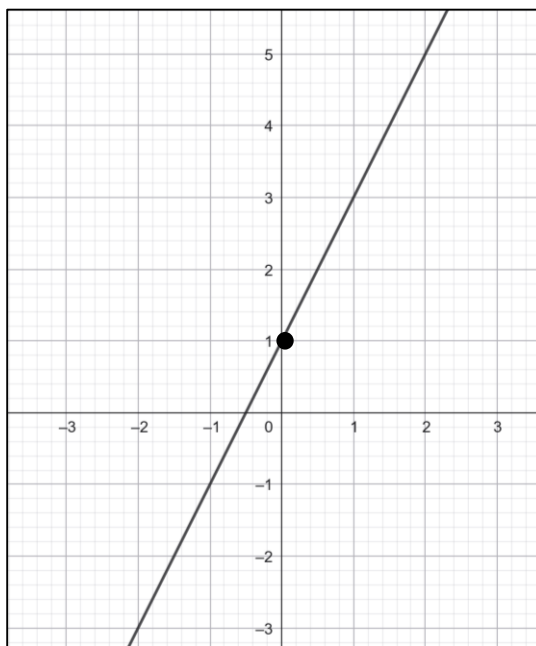


Figura 4.14. Gráfica de la recta $y = 2x + 1$

4.3.2.3. Obtención de una recta conocidos dos puntos.

A partir de dos puntos conocidos, podemos reconstruir la ecuación de la recta, combinando toda la información que vimos en los apartados anteriores.

Ejemplo 4.14: Calculemos la ecuación de la recta que pasa por los siguientes pares de puntos:

a) $P = (1, 2)$ y $Q = (4, 8)$

Habiendo calculado en el ejemplo 4.13 que la pendiente de la recta es $a = 2$, podemos usar cualquiera de los dos puntos conocidos para reemplazarlos en la expresión general de la recta: $y = ax + b = 2x + b$

Reemplazamos, por ejemplo, las coordenadas (x, y) del punto $P = (1, 2)$, obteniendo $2 = 2 \cdot 1 + b$

Y ahora despejamos algebraicamente el valor de b : $2 = 2 + b \Rightarrow 2 - 2 = b \Rightarrow 0 = b$

Es decir, que la ordenada al origen de esta recta es 0. Así, la ecuación queda: $y = ax + b = 2x$

Podemos observar la gráfica de esta recta en la figura 4.15.

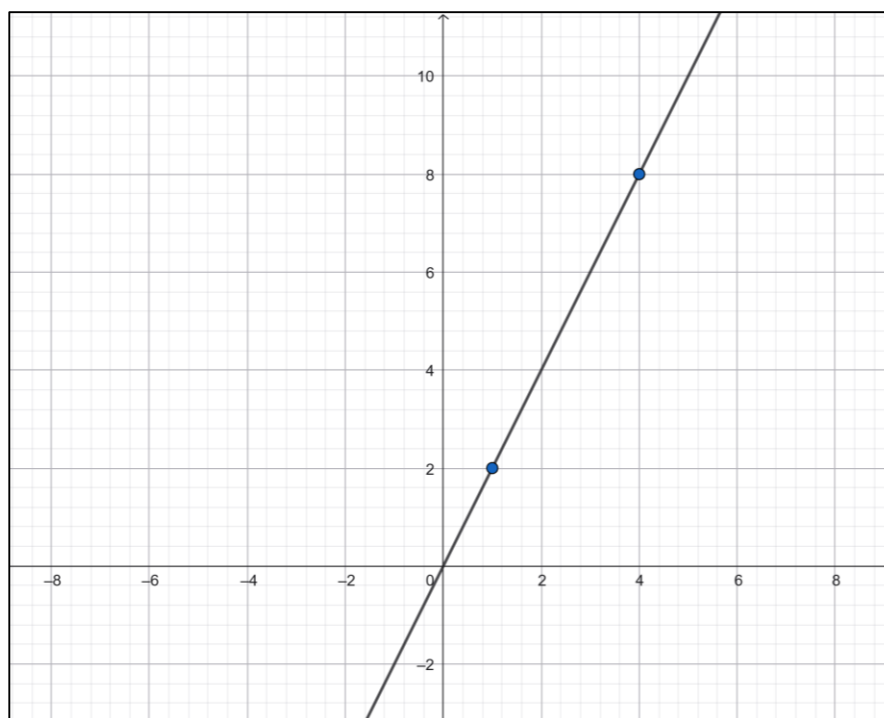


Figura 4.15. Gráfica de la recta $y = 2x$

b) $A = (0, 1)$ y $B = (2, -5)$

Habiendo calculado en el ejemplo 4.13 que la pendiente de la recta es $a = -3$, la expresión general de la recta queda: $y = ax + b = -3x + b$

Reemplazamos, por ejemplo, las coordenadas (x, y) del punto $A = (0, 1)$, obteniendo $1 = -3 \cdot 0 + b$

Es claro que el valor de $b = 1$, así que la ecuación queda: $y = ax + b = -3x + 1$

Podemos observar la gráfica de esta recta en la figura 4.16.

c) $M = (1, 2)$ y $N = (4, 2)$

En este caso, al ser la pendiente nula, podemos reemplazar cualquiera de los puntos en la ecuación de la recta, obteniendo: $y = ax + b = 0x + b = b$. Tomemos a M para reemplazar los valores de las coordenadas (x, y) obtenemos el valor de la ordenada al origen: $2 = 0 \cdot 1 + b = b \Rightarrow b = 2$

Por lo tanto, la ecuación de la recta resulta ser: $y = ax + b = 2$

Podemos observar la gráfica de esta recta en la figura 4.17.

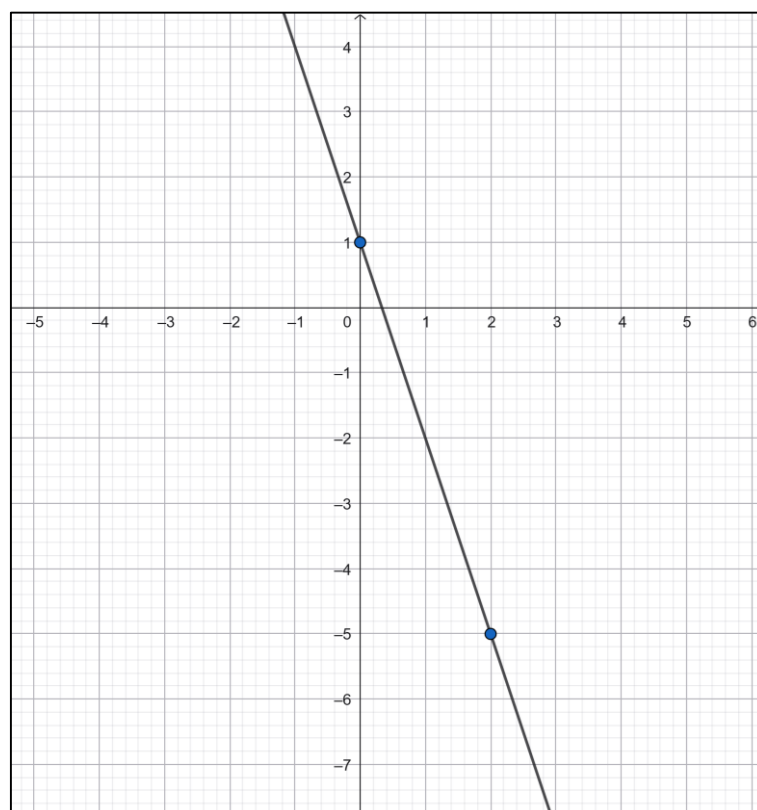


Figura 4.16. Gráfica de la recta $y = -3x + 1$

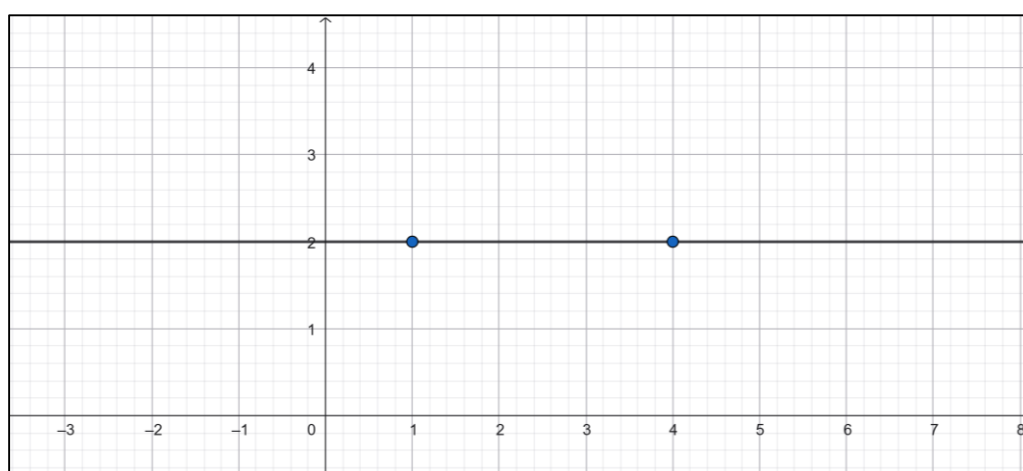


Figura 4.17. Gráfica de la recta $y = 2$

4.3.3. Funciones de segundo grado.

Las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, abreviadamente escritas como las funciones $y = ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son números reales y $a \neq 0$ se denominan **funciones de segundo grado**.

Nuestro objetivo es tener una idea aproximada de cómo es la representación gráfica de una función de este tipo.

Comencemos estudiando el caso más sencillo, la función $f(x) = ax^2$, definida para todo x real. En primer lugar, observemos:

I) no habrá puntos del gráfico por debajo del eje de las “ x ” pues “ y ” no puede ser negativo.

II) El origen de coordenadas es un punto del gráfico.

III) Si un par (a, b) pertenece al gráfico de la función $b = a^2$, el par $(-a, b)$ también pertenece y por consiguiente la representación gráfica será simétrica respecto al eje “y”.

Ejemplo 4.15: Calculemos algunos pares del gráfico de la función:

x	0	1/2	1	3/2	2
$y = x^2$	0	1/4	1	9/4	4

Representamos los puntos obtenidos en el plano cartesiano, dibujando también los simétricos. Eso nos da la figura 4.18:

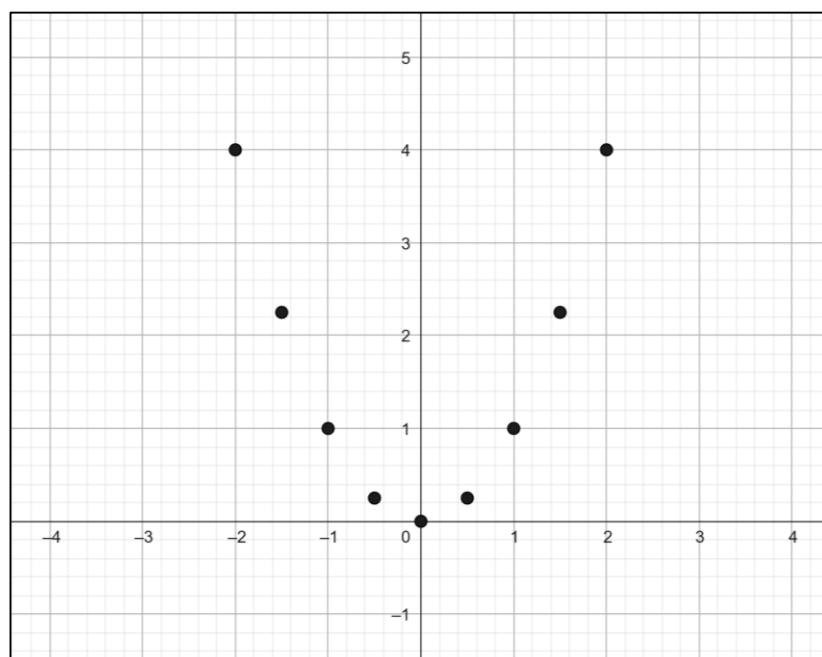


Figura 4.18. Gráfica de los puntos obtenidos para la función $f(x) = ax^2$

Para poder hacer la representación gráfica utilizamos el hecho de que la función es “continua” y “suave”. (En cursos superiores de matemáticas se verá que esta función es realmente continua y suave, previa definición de estos términos) Entonces unimos los puntos marcados con una curva de estas características y obtenemos la representación gráfica de la función: $f(x) = x^2$, que puede verse en la figura 4.19.

La curva obtenida es lo que se llama una **parábola a eje vertical**, cuyo vértice está en el origen.

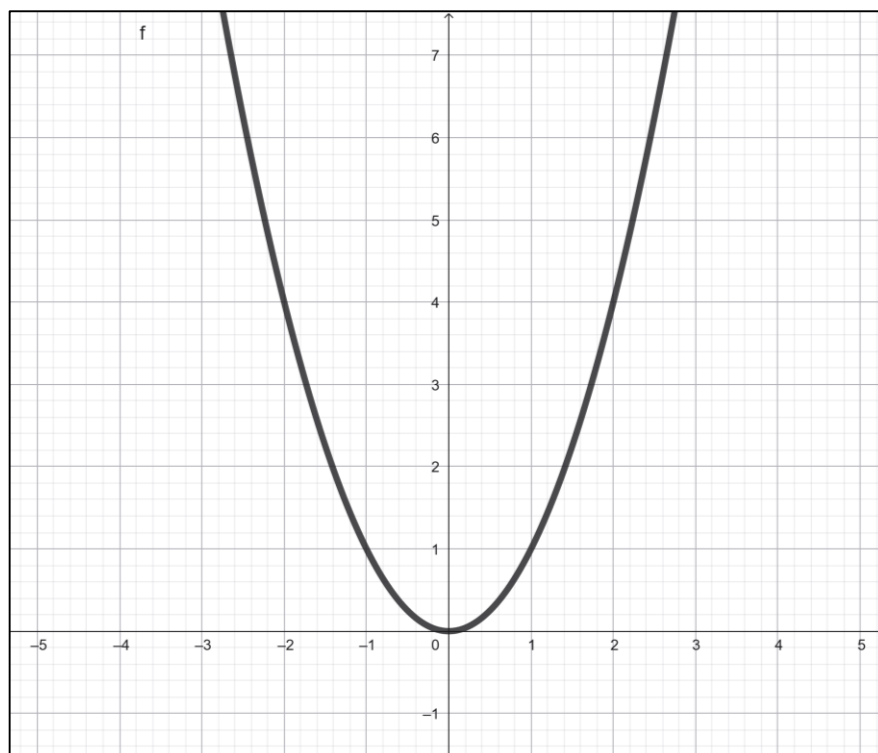


Figura 4.19. Gráfica de la función $f(x) = x^2$

Si queremos ahora hacer la representación gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$ bastará con “trasladar” el gráfico de $f(x) = x^2$ una unidad hacia arriba en la dirección del eje “y” (figura 4.20)

Similarmente la representación gráfica de $f(x) = x^2 - 2$ se obtiene “trasladando” la de $f(x) = x^2$ en “2 unidades hacia abajo” en la dirección del eje “y” (figura 4.20).

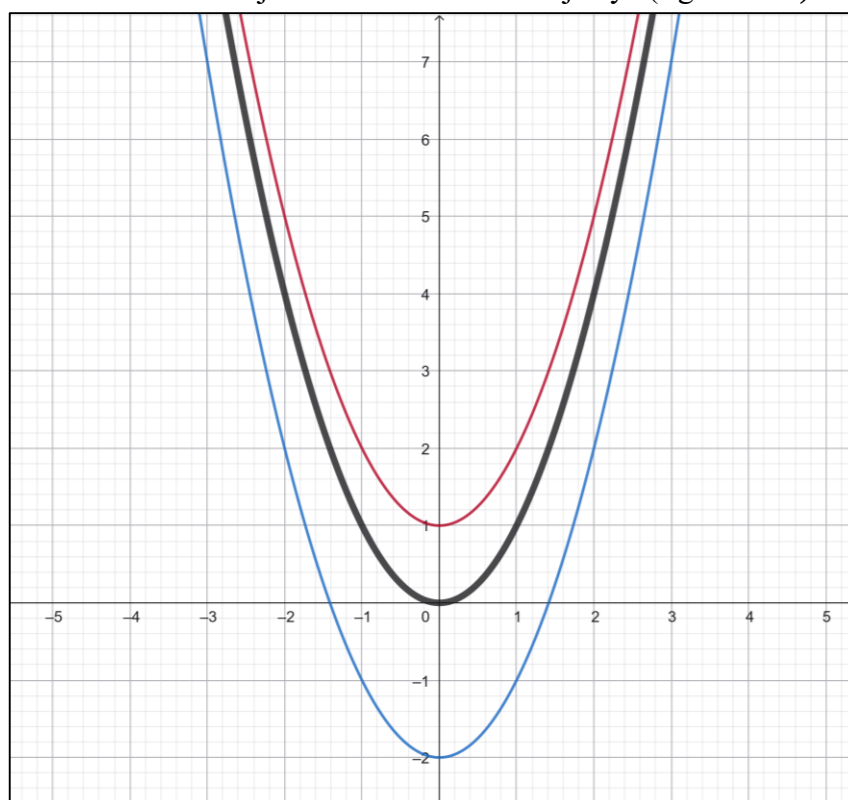


Figura 4.20. Gráfica de las funciones $f(x) = x^2$ (negro), $f(x) = x^2 + 1$ (rojo) y $f(x) = x^2 - 2$ (azul)

Tenemos una buena idea de cómo es la representación gráfica de funciones de la forma $f(x) = x^2 + a$: son parábolas cuyo eje coincide con el eje “y”, y cuyo vértice es el punto $(0, a)$.

La figura 4.21 muestra la representación gráfica de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = \frac{1}{4}x^2$

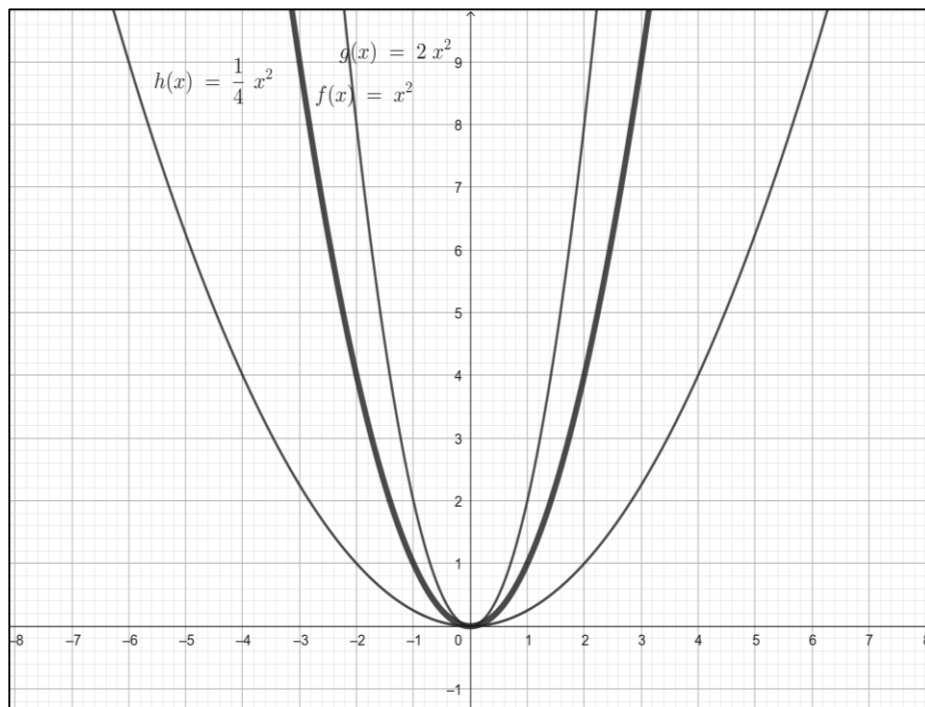


Figura 4.21. Gráfica de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = \frac{1}{4}x^2$

Cada punto del gráfico de g se obtiene del de f como sigue: si (a, b) pertenece al gráfico de f , el punto $(a, 2b)$ pertenece al gráfico de g . Por consiguiente, basta con multiplicar por 2 las ordenadas de los puntos de f .

Similarmente, multiplicando por $1/4$ cada distancia al eje “x” se obtiene los puntos del gráfico de $h(x) = \frac{1}{4}x^2$.

Ahora tenemos una buena idea de cómo será la representación gráfica de las funciones de la forma $f(x) = ax^2$: siempre resulta una parábola cuyo eje coincide con el eje “y”, cuyo vértice es el origen. Si a es un número positivo ($a > 0$), las ramas “apuntan” hacia arriba y cuanto mayores sean los valores de a se obtendrán parábolas más “estrechas”.

Observemos en la figura 4.22 la representación gráfica de las funciones: $j(x) = -x^2$, $k(x) = -2x^2$, $l(x) = -\frac{1}{4}x^2$

Para valores de a negativos ($a < 0$), la parábola se invierte, es decir, las ramas “apuntan” hacia abajo. Nuevamente, observamos que cuanto mayores sean los valores de a se obtendrán parábolas más “estrechas”.

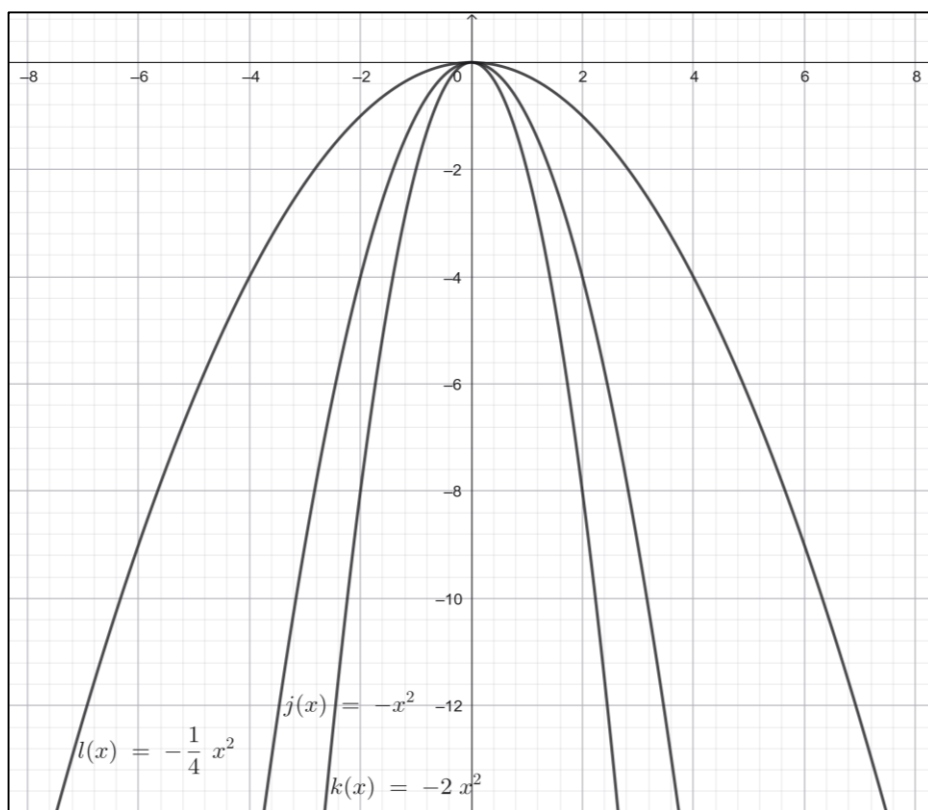


Figura 4.22. Gráfica de las funciones $j(x) = -x^2$, $k(x) = -2x^2$, $l(x) = -\frac{1}{4}x^2$

La figura 4.23 muestra los gráficos de las funciones definidas por:
 $f(x) = x^2$, $g(x) = (x-1)^2$, $h(x) = (x+2)^2$

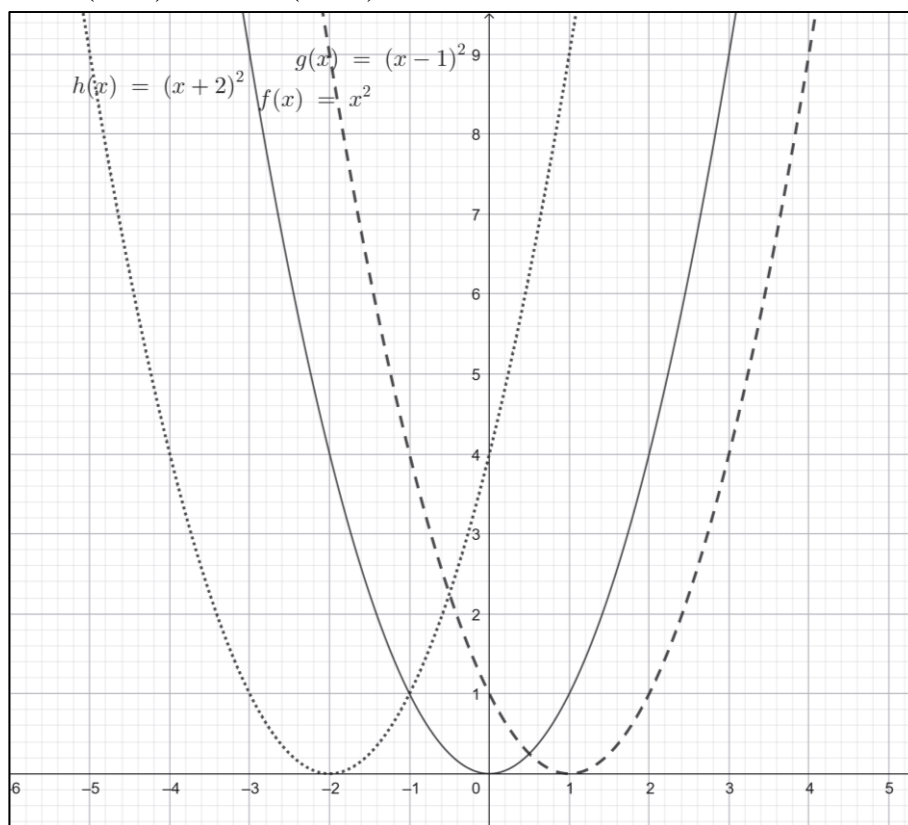


Figura 4.23. Gráfica de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = (x-1)^2$, $h(x) = (x+2)^2$

El gráfico de g se obtiene del de f de la siguiente manera: si (a, b) es un punto perteneciente al gráfico de f ($b = a^2$) el punto $(a + 1, b)$ pertenece al gráfico de g . Para verificar esto debemos mostrar que el cuadrado de la primera coordenada menos uno es la segunda. En símbolos:

$$((a+1)-1)^2 = a^2 = b$$

Geoméricamente, significa que la representación gráfica de g se obtiene trasladando una unidad horizontalmente hacia la derecha la representación gráfica de f .

Similarmente, la representación gráfica de h se obtiene trasladando 2 unidades horizontalmente hacia la izquierda la parábola $f(x) = x^2$.

Tenemos una idea razonable de cómo es la representación gráfica de las funciones de la forma $f(x) = (x - a)^2$.

Queremos ahora hacer la representación gráfica de la función $y = 2(x - 3)^2 + 4$

La obtenemos trasladando el gráfico de $y = 2x^2$ en 3 unidades horizontalmente hacia la derecha y luego 4 unidades verticalmente hacia arriba (figura 4.24).

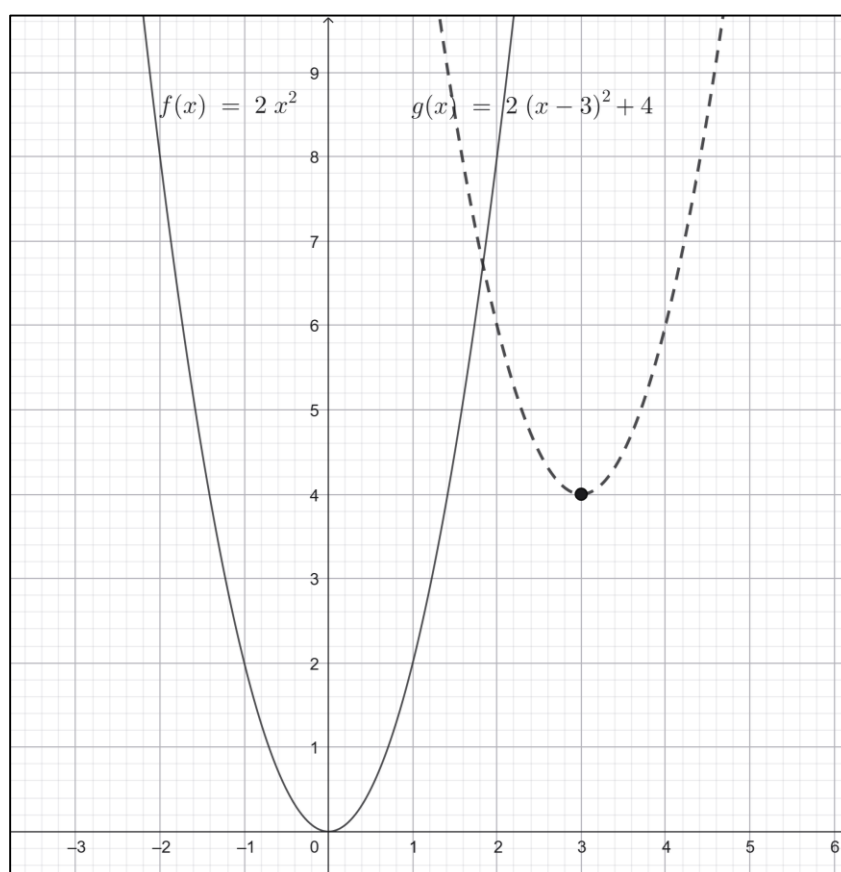


Figura 4.24. Gráfica de las funciones $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 2(x - 3)^2 + 4$

En general la representación gráfica de la función $f(x) = a(x - s)^2 + t$ se obtiene trasladando la parábola $f(x) = ax^2$, “s” unidades horizontalmente (hacia la derecha si “s” es positivo y hacia la izquierda si “s” es negativo), y “t” unidades verticalmente (hacia arriba si “t” es positivo y hacia abajo si “t” es negativo). Es decir, se obtiene una parábola cuyo eje es la recta $x = s$ y cuyo vértice es el punto (s, t) .

Veamos que toda función cuadrática puede ser escrita en esta forma, utilizando para ello el método de “completar cuadrados”.

Método de completar cuadrados

Recordamos que $(x-s)^2 = x^2 - 2xs + s^2$

Ejemplo 4.16: Queremos expresar: $y = x^2 - 4x + 5$ en la forma $y = a(x-s)^2 + t$.

Observemos que $x^2 - 4x$ puede pensarse como los 2 primeros sumandos del desarrollo de $(x-s)^2$ con $s = 2$, es decir: $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Volviendo a la ecuación que nos interesa:

$$y = x^2 - 4x + 5$$

Vemos que no es igual a lo que deberíamos tener. Pero, si sumamos y restamos 4 en la expresión de la derecha, obtenemos:

$$y = x^2 - 4x + 4 - 4 + 5$$

Y reacomodando:

$$y = (x^2 - 4x + 4) + 5 - 4$$

$$y = (x-2)^2 + 1$$

Ejemplo 4.17: Consideramos ahora la función definida por $y = x^2 + 3x - 10$. Razonando como en el ejemplo anterior debemos tomar

$$s = -\frac{3}{2}$$

Luego

$$y = x^2 + 3x - 10$$

$$= x^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)x - 10$$

$$= x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 10$$

$$= \left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} - 10$$

$$y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

Ejemplo 4.18: Queremos expresar en la forma $y = a(x-s)^2 + t$ a la función definida por $y = -3x^2 - 6x - 1$

Para ello, primero saquemos el (-3) como factor común. Así obtenemos

$$y = -3x^2 - 6x - 1 = -3\left(x^2 + 2x + \frac{1}{3}\right)$$

Ahora trabajemos los términos que están dentro del paréntesis:

$$y = x^2 + 2x + \frac{1}{3}$$

$$= x^2 + 2x + 1 - 1 + \frac{1}{3}$$

$$= (x^2 + 2x + 1) + \frac{1}{3} - 1$$

$$y = (x+1)^2 - \frac{2}{3}$$

Como esto es el resultado solamente del paréntesis, lo reemplazamos:

$$y = -3x^2 - 6x - 1 = -3\left(x^2 + 2x + \frac{1}{3}\right) = -3\left((x+1)^2 - \frac{2}{3}\right)$$

Y ahora resolvemos el producto indicado:

$$y = -3(x+1)^2 - 3\left(-\frac{2}{3}\right)$$

de donde vemos que

$$y = -3(x+1)^2 + 2$$

En conclusión, podemos intuir que toda función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, puede expresarse en la forma $y = a(x-s)^2 + t$. Demostremos este resultado:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\frac{f(x)}{a} = \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$$

Dividimos por a toda la expresión. Luego, sumamos y restamos $\frac{b^2}{4a^2}$

$$\frac{f(x)}{a} = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$$

$$\frac{f(x)}{a} = \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$$

$$\frac{f(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$$

Sumando las fracciones que quedaron fuera del paréntesis:

$$\frac{f(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

Por último, despejamos la función:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Consejo: No intentar memorizar esta expresión y en cada caso completar cuadrados, tal como lo hicimos en los ejemplos anteriores.

En resumen: hemos mostrado que la representación gráfica de toda función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola a eje vertical.

Ejemplo 4.19: Trazar la gráfica de la parábola definida por la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$

En el ejemplo 4.16 vimos que esta función puede escribirse como $f(x) = (x-2)^2 + 1$

El valor de f se calcula sumándole a un cuadrado el número 1. El menor valor de f ocurrirá para $x-2=0$ esto es, para $x=2$.

Como $f(2)=1$ el punto $(2, 1)$ es el punto “más bajo” de la curva (llamado vértice). Obtendremos la parábola pedida trasladando la parábola $y = x^2$ en 2 unidades horizontalmente hacia la derecha y 1 unidad verticalmente hacia arriba. Luego, $x=2$ es el eje de la parábola. La gráfica de la función puede verse en la figura 4.25.

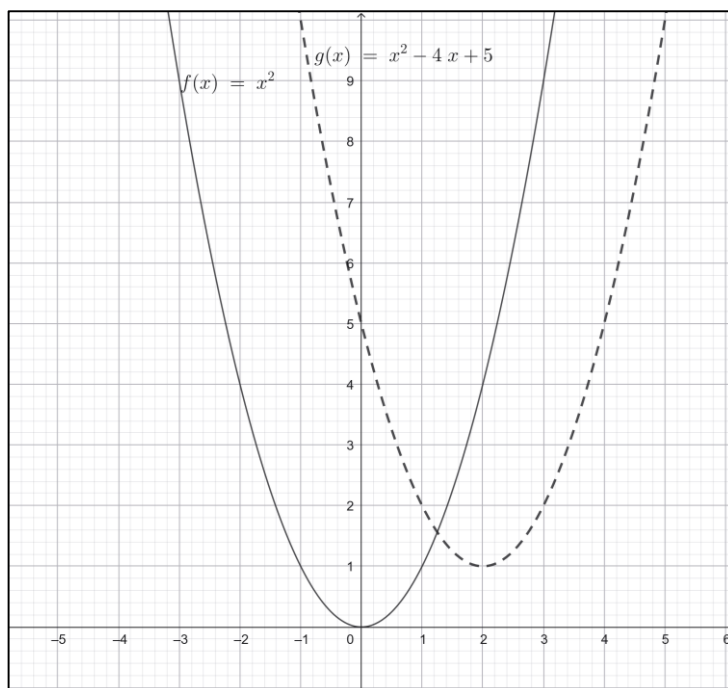


Figura 4.25. Gráfica de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 4x + 5$

Ejemplo 4.20: Trazar la representación gráfica de la función definida por: $y = -3x^2 - 6x - 1$

A esta función la analizamos en el ejemplo 4.18, obteniendo: $y = -3(x+1)^2 + 2$

Obtenemos la representación gráfica trasladando la parábola $y = -3x^2$ una unidad horizontalmente a la izquierda y dos unidades verticalmente hacia arriba. Es evidente que el mayor valor para f ocurre cuando $x+1=0$, es decir para $x = -1$. Luego $f(-1) = 2$ es el máximo valor de la función. La recta $x = -1$ es el eje de la parábola y el punto $(-1, 2)$ su vértice. La gráfica obtenida puede verse en la figura 4.26.

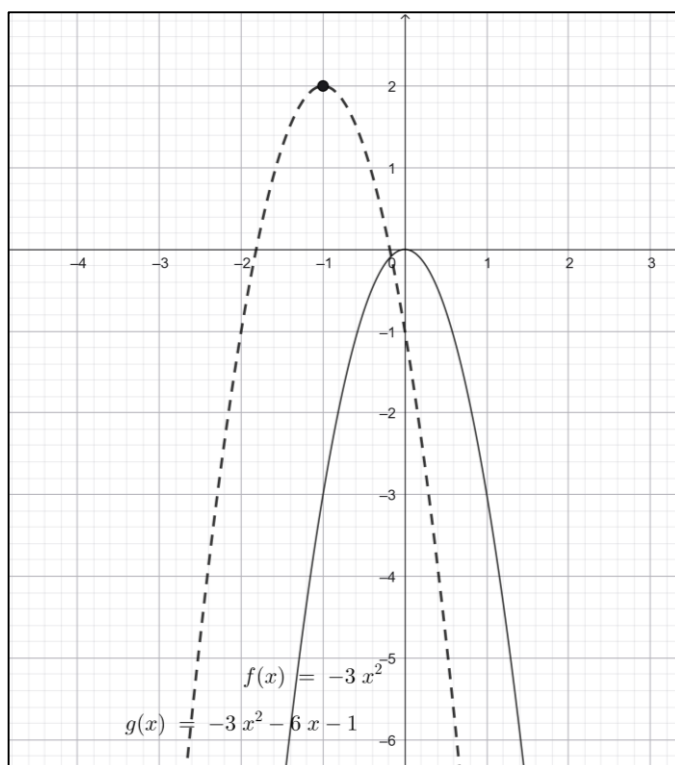
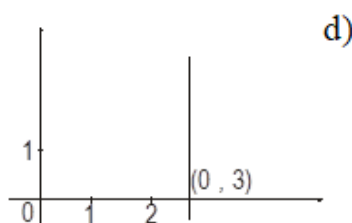
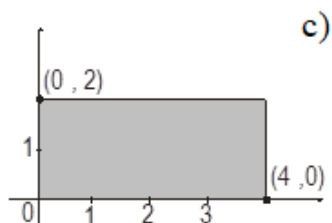
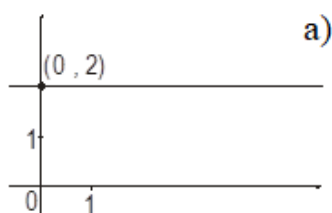


Figura 4.26. Gráfica de las funciones $f(x) = -3x^2$, $g(x) = -3x^2 - 6x - 1$

Ejercitación del Capítulo 4

Ejercicio 4.1) Definir las relaciones graficadas en las siguientes figuras:



Ejercicio 4.2) En un ecosistema marino, el fitoplancton o bien es comido por el zooplancton, o por los omnívoros, o perece. El zooplancton es comido por los omnívoros, o por los carnívoros, o perece. Finalmente, los omnívoros y los carnívoros se devoran entre sí o perecen. Teniendo en cuenta esta situación, definir una relación en el conjunto producto $S \times S$ donde $S = \{\text{fitoplancton, zooplancton, omnívoros, carnívoros, extinción}\}$ y encontrar un gráfico apropiado.

Ejercicio 4.3) Representar gráficamente los subconjuntos de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definidos por cada una de las siguientes relaciones:

a) $\{(x, y) / x = 2\}$

b) $\{(x, y) / y = 0\}$

c) $\{(x, y) / x^2 + y^2 = 1\}$

d) $\{(x, y) / 0 < x < 2 \text{ y } y > 0\}$

Ejercicio 4.4) Expresar la relación inversa de cada una de las relaciones definidas en el ejercicio anterior y representarlas gráficamente.

Ejercicio 4.5) Verificar si la asignación $x \rightarrow 1/x$ define una función de los siguientes casos:

a) $A = \mathbb{R} \quad B = \mathbb{R}$

b) $A = \mathbb{R} > 0 \quad B = \mathbb{Q}$

c) $A = \mathbb{R} - \{0\} \quad B = \mathbb{Z}$

d) $A = \mathbb{R} > 0 \quad B = \mathbb{R}$

Ejercicio 4.6) Si la regla de asignación fuera:

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ x \rightarrow 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Quedaría definida una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

Ejercicio 4.7) Verifique si la asignación: $x \rightarrow \frac{(x^2 - 4)}{(x - 2)}$ define una función de A en B en los siguientes casos:

- a) $A = \mathbb{R}$ $B = \mathbb{R}$
 b) $A = \mathbb{R} - \{2\}$ $B = \mathbb{R}$
 c) $A = \mathbb{Z} - \{2\}$ $B = \mathbb{Q}$
 d) $A = \{-3, -1, 0, 3\}$ $B = \mathbb{Z} - \{2\}$

Ejercicio 4.8) Si la regla de asignación fuera:

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{(x^2 - 4)}{(x - 2)} & \text{si } x \neq 2 \\ x \rightarrow 8 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

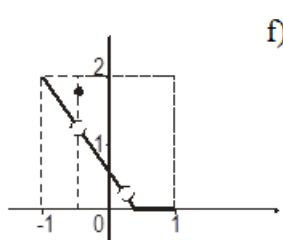
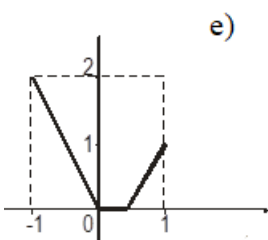
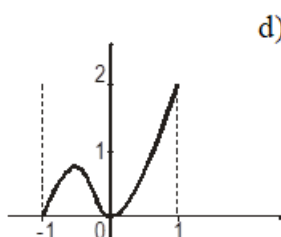
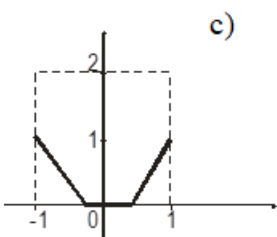
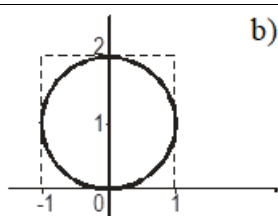
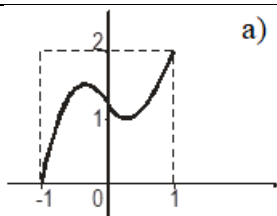
¿quedaría definida una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

Ejercicio 4.9) Si la regla de asignación fuera:

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{(x^2 - 4)}{(x - 2)} & \text{si } x \neq 2 \\ x \rightarrow 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

¿quedaría definida una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

Ejercicio 4.10) Determinar cuáles de los siguientes gráficos representan funciones de $[-1; 1]$ en $[0; 2]$.



Ejercicio 4.11) Indicar cuáles de los siguientes puntos pertenecen al gráfico de la función $y = 4$

- a) (0, 4) b) (0, 0) c) $(\pi, 4)$ d) $(-1, 2)$ e) (8, 4) f) (4, -4)

Ejercicio 4.12) Representar gráficamente las siguientes funciones:

- | | |
|------------------|----------------------------|
| a) $y = 0$ | h) $y = 3x + 2$ |
| b) $y = 3$ | i) $y = \frac{2}{3}x$ |
| c) $y = -3$ | j) $y = \frac{2}{3}x + 4$ |
| d) $y = x$ | k) $y = -\frac{2}{3}x - 3$ |
| e) $y = -x$ | |
| f) $y = x + 2$ | |
| g) $y = -2x + 2$ | |

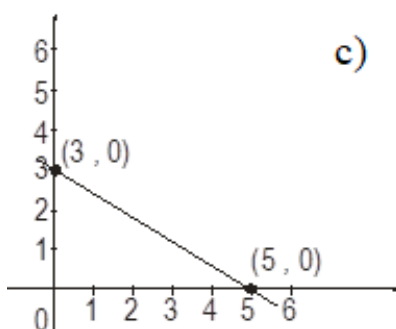
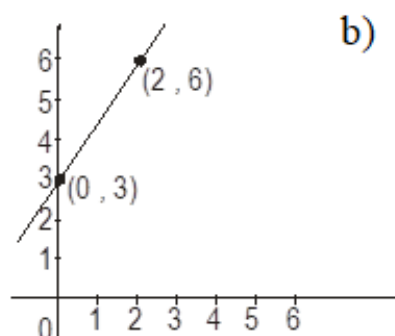
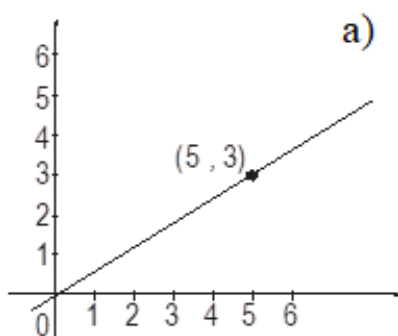
Ejercicio 4.13) Determinar cuáles de los siguientes puntos pertenecen al gráfico de la función $y = -2x + 5$

- a) (1, 3) b) (0, 5) c) (-1, 8) d) (2, 2) e) (3, -1)

Ejercicio 4.14) Sea la recta definida por la función $y = -5x + 6$. Determinar:

- a) el punto de la misma de abscisa 3.
- b) el punto de la misma de ordenada -2.
- c) el punto intersección de la recta con el eje x.
- d) el punto intersección de la recta con el eje y.

Ejercicio 4.15) Determinar la función $y = ax + b$ que tiene por representación gráfica la recta indicada en cada figura.



Ejercicio 4.16) Calcule la pendiente de la recta que pasa a través de los puntos dados:

- | | |
|----------------------|--------|
| a) (2; 7) y (4; 9) | R: 1 |
| b) (5; -1) y (2; -2) | R: 1/3 |

Ejercicio 4.17) Halle la ecuación de la recta que pasa a través del par de puntos:

- a) (4; 3) y (2; 5) R : $x + y = 7$
b) (4; 7) y (-2; 3) R : $2x - 3y = -13$

Ejercicio 4.18) Determine la ecuación de la recta que cumple con:

- a) Pasa a través de (3; 2), con pendiente 3 R: $3x - y = 7$
b) Pasa a través de (-2; -3), con pendiente $-2/5$. R: $2x + 5y + 19 = 0$
c) Con pendiente 4, y ordenada al origen 2. R: $y = 4x + 2$
d) Con pendiente -5 , y ordenada al origen -7 . R: $y = -5x - 7$

Ejercicio 4.19) Calcule la pendiente y la ordenada en el origen de la recta determinada por la ecuación:

- a) $2x - y = 4$ R: 2, -4
b) $x - 2y = 7$ R: $1/2$, $-7/2$.

Ejercicio 4.20) Demuestre, utilizando pendientes, que los tres puntos dados están situados sobre la misma recta:

- a) (-2; -10), (1; -1), (2; -2).

R: La pendiente del segmento que une cada par de puntos es 3

- b) (-1; 8), (0; 3), (2; -7)

R: La pendiente del segmento entre cada par de puntos es -5

Ejercicio 4.21) Halle la ecuación de la recta que pasa a través de (1; 4) y es paralela a la recta $-4x + 6y = 2$

R: $2x - 3y + 10 = 0$

Ejercicio 4.22) Halle la ecuación de la recta que tiene la misma ordenada en el origen que la de $2x + 5y = -25$ y cuya pendiente es el doble de la de $9x - 3y = 4$.

R: $y = 6x - 5$

Ejercicio 4.23) Encontrar la función de primer grado cuya representación gráfica es paralela a la correspondiente a la función $y = 2x + 3$, y que contiene al punto (-3, 4). Graficar este problema.

Ejercicio 4.24) Una varilla de cobre que forma parte de un instrumento está expuesta a diferentes temperaturas. Su longitud l es casi una función lineal de la temperatura t siempre que $t < 150^\circ$ (Celsius). Encontrar la ecuación para l utilizando las siguientes medidas.
 $t_1 = 15^\circ$, $l_1 = 76,45$ cm y $t_2 = 100^\circ$, $l_2 = 76,56$ cm

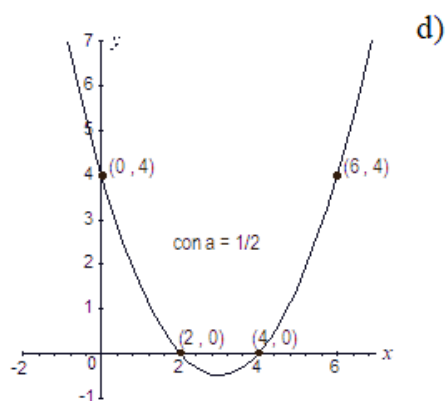
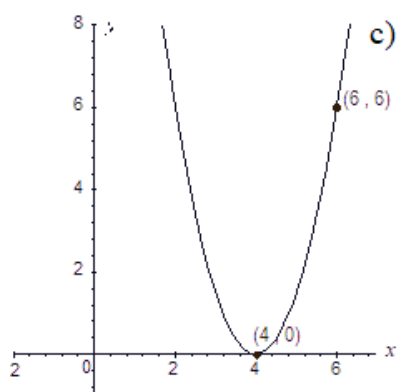
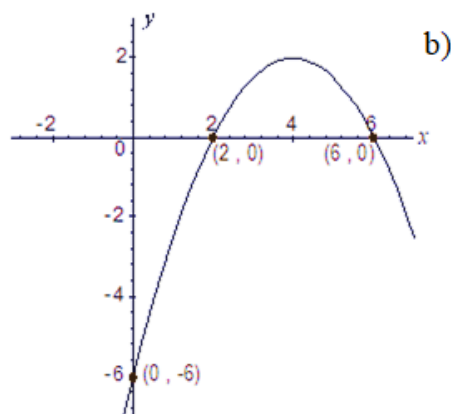
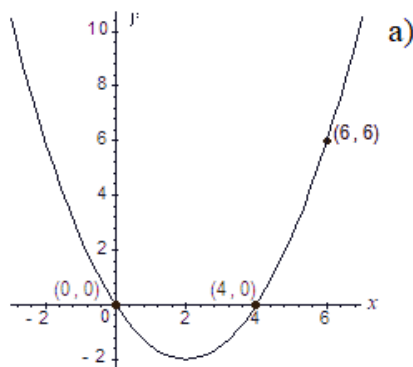
Ejercicio 4.25) La temperatura en la escala Celsius, denotada por x , y la temperatura en la escala Fahrenheit (denotada por y), cumplen con la relación lineal $5y - 9x = 160$. Expresar y como función de x y dibujar la función. Prepare una tabla de conversión para $x = 36,0^\circ$; $36,1^\circ$; $36,2^\circ$; ...; $37,0^\circ$.

Ejercicio 4.26) Sea Q la cantidad de calor que se requiere para cambiar 1 gramo de agua a 0°C , en agua a $T^\circ\text{C}$. Supongamos que Q es una función lineal de T (temperatura del agua), y también que $0 \leq T \leq 100$. Si $Q = 70$ a $T = 15^\circ$ y $Q = 140$ cuando $T = 85^\circ$, ¿Cuál es la cantidad de calor que se requiere para llevar el agua de 0° a 5°C ?

Ejercicio 4.27) Representar gráficamente las funciones:

- | | |
|-------------------|-----------------------------|
| a) $y = x^2$ | g) $y = 2(x+1) \cdot (x-3)$ |
| b) $y = -x^2$ | h) $y = -x^2 + 4$ |
| c) $y = x^2 + 2$ | i) $y = x^2 - 4$ |
| d) $y = -x^2 + 2$ | j) $y = x^2 - 2x + 1$ |
| e) $y = 2x^2 + 3$ | k) $y = x^2 - 5x + 6$ |
| f) $y = (x-1)^2$ | l) $y = -x^2 - 3x - 2$ |

Ejercicio 4.28) Determinar en cada caso la función $y = ax^2 + bx + c$ cuya representación gráfica es:



Ejercicio 4.29) Supóngase que un campo rectangular está al lado de un río, hay que vallarlo por sus otros lados y se dispone de una longitud de valla de 50 m.

- Encontrar una función cuadrática que exprese el área del terreno A correspondiente al ancho x .
- Dibujar la gráfica de la función de la parte a).
- ¿En qué punto alcanza f el máximo? ¿Cuál es la mayor superficie que puede ser vallada?

Ejercicio 4.30) Dibuje la gráfica de la parábola:

- | | |
|-------------------|--------------------------|
| a) $y = 2x^2$ | g) $y - 2 = -(x+1)^2$ |
| b) $y = -3x^2$ | h) $y - 1 = (x+3)^2$ |
| c) $y = x^2 / 2$ | i) $y - 2 = 2(x-3)^2$ |
| d) $y = -x^2 / 3$ | j) $y - 4 = -3(x+1)^2$ |
| e) $y = (x+3)^2$ | k) $y = 2x^2 - 4x + 6$ |
| f) $y = -(x+1)^2$ | l) $y = 3x^2 + 18x + 30$ |

Ejercicio 4.31) Escriba la ecuación de cada parábola en forma canónica:

a) $y = 4x^2 - 8x + 6$ R : $y - 2 = 4(x - 1)^2$

b) $y = -3x^2 + 18x - 28$ R : $y + 1 = -3(x - 3)^2$

Ejercicio 4.32) Halle el eje de simetría y el vértice de las siguientes parábolas:

a) $y = 4x^2 - 16x + 17$ R : $x = 2$, (2; 1)

b) $y = -3x^2 + 6x - 4$ R : $x = 1$, (1; -1)

Capítulo 5: Ecuaciones

Objetivos

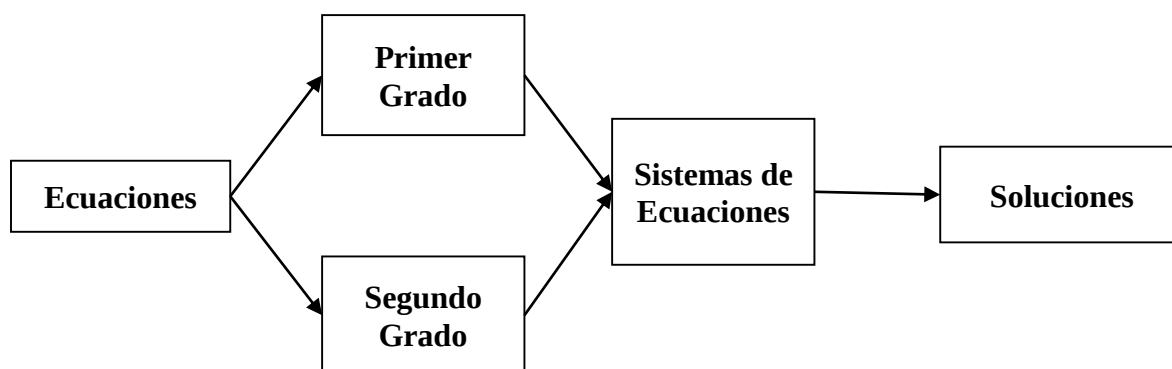
Al finalizar esta unidad usted deberá ser capaz de:

- Resolver ecuaciones de primer grado con una o dos incógnitas.
- Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- Resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
- Resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas de primer y segundo grado.
- Trasladar al lenguaje algebraico relaciones de igualdad expresadas en el lenguaje ordinario.
- Adquirir una metodología adecuada para resolver problemas.

Contenidos

- 5.1 Ecuación de primer grado con una y dos incógnitas.
- 5.2 Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- 5.3 Ecuación de segundo grado con una incógnita. Reconstrucción de la ecuación de segundo grado con una incógnita, conocidas sus raíces.
- 5.4 Sistemas mixtos. Método de sustitución.

Esquema conceptual



Introducción.

En esta unidad se consideran distintos tipos de ecuación y la operatoria correspondiente para obtener la solución de cada una de ellas. Agrupamos estas ecuaciones para obtener sistemas de ecuaciones y detallaremos la metodología conveniente para resolverlos. También plantearemos problemas de distinta naturaleza que se expresarán matemáticamente por una o más ecuaciones.

Recordar: Aprender a calcular con exactitud y operar símbolos con facilidad es un gran objetivo. Pero poder resolver problemas fáciles y difíciles, prácticos y abstractos, es una proeza suprema.

Orientación del aprendizaje

Lea la introducción teórica de cada tema y desarrolle personalmente los ejemplos que le siguen. Realice la ejercitación correspondiente.

Bibliografía de la unidad

- Englebert, S., Pedemonti, S., Semino, S., “Matemática 3”. AZ editora.

- De Simone, I., Turner, M., “Matemática 4”. AZ editora.
- Tapia, N., Bibiloni, A., Tapia, C., “Matemática 3 y 4”. Editorial Estrada.

5.1. Ecuación de primer grado con una y dos incógnitas.

5.1.1. Ecuación de primer grado con una incógnita.

Planteamos el siguiente problema: Dada la función: $y = ax + b$ queremos encontrar el punto de intersección de su representación gráfica con el eje “x”.

Ejemplo 5.1: Si $y = 3x - 6$ nos preguntamos para que valores de “x” es $y = 0$, es decir: $3x - 6 = 0$. Es evidente en este caso que la igualdad se verifica únicamente para $x = 2$. Entonces, decimos que 2 es la única solución de la ecuación planteada.

Las **ecuaciones de primer grado** con una incógnita son de la forma $ax + b = 0$ con $a \neq 0$. Resolver una ecuación es determinar todas sus soluciones (o raíces). Ilustremos con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 5.2: Resolver la ecuación $2x + 7 = 0$.

$$2x + 7 = 0$$

$$2x = -7$$

$$x = -\frac{7}{2}$$

Esta última ecuación tiene por única solución el número $-7/2$ que es también la única solución de la ecuación planteada.

Ejemplo 5.3: La ecuación $(6x+1)(x+3) = (3x+2)(2x-1)$ aparentemente no es una ecuación de primer grado. Sin embargo, efectuando las operaciones indicadas resulta:

$$6x^2 + 18x + x + 3 = 6x^2 - 3x + 4x - 2$$

$$19x + 3 = x - 2$$

$$18x = -5$$

$$x = -\frac{5}{18}$$

Ejemplo 5.4: Resolver $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$

Efectuando las operaciones: $x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2$ que evidentemente se verifica para todo valor de “x”. Por consiguiente, el conjunto de soluciones de esta ecuación es el conjunto de todos los números reales.

Ejemplo 5.5: Resolver

$$2\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = x + 7$$

$$x - 2 = x + 7$$

Es evidente que ningún número real verifica esta ecuación. Por consiguiente la ecuación planteada carece de soluciones. Una ecuación que carece de soluciones se dice **incompatible**.

Ejemplo 5.6: Resolver: $(x+2)(3x-1) = (3x+6)(x+1)$

Trabajando algebraicamente:

$$\begin{aligned}
 (x+2)(3x-1) &= (3x+6)(x+1) \\
 3x^2 - x + 6x - 2 &= 3x^2 + 3x + 6x + 6 \\
 5x - 2 &= 9x + 6 \\
 -4x &= 8 \\
 x &= -2
 \end{aligned}$$

Observación: Como $3x + 6 = 3(x + 2)$ la ecuación anterior puede escribirse: $(x + 2)(3x - 1) = 3(x + 2)(x + 1)$. En este punto nos sentimos tentados de simplificar el factor $(x + 2)$. Si hiciéramos tal cosa obtendríamos la ecuación: $3x - 1 = 3(x + 1)$, que evidentemente es incompatible. Explique a qué se debe esta aparente contradicción.

En los ejemplos anteriores se han considerado ecuaciones que son de la forma $ax + b = 0$, con $a \neq 0$. En algunos casos resultó que, mediante operaciones que no alteran el conjunto de soluciones, pueden llevarse a una ecuación del tipo mencionado; es costumbre en estos casos, decir (abusando del lenguaje) que la ecuación original es de primer grado. Los ejemplos 5.4 y 5.5 ilustran el caso en que la ecuación original no puede llevarse a la forma deseada.

La ecuación $ax + b = 0$, con $a \neq 0$ siempre se puede resolver y admite la solución única $x = -\frac{b}{a}$.

5.1.2. Ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Una ecuación de la forma $ax + by = c$ se llama **ecuación de primer grado con 2 incógnitas**. Una solución de una ecuación de este tipo es un par ordenado de números que la satisfacen.

Ejemplo 5.7: Sea la ecuación $2x - y = 7$.

El par $(4, 1)$ es una solución pues $2 \cdot 4 - 1 = 7$.

Los pares $(0, -7)$, $(1, -5)$, $(1/2, -6)$, $(4/3, -13/3)$ son también soluciones.

El par $(3, 5)$ no es una solución pues $2 \cdot 3 - 5 = 1$, que no es 7.

Es inmediato observar que, si una ecuación de primer grado con 2 incógnitas tiene solución, entonces tiene infinitas soluciones. Queremos caracterizar los pares (x, y) que satisfacen la ecuación planteada. Continuando con el ejemplo:

$$\begin{aligned}
 2x - y &= 7 \\
 -y &= 7 - 2x \\
 y &= -7 + 2x
 \end{aligned}$$

Es decir que el conjunto de soluciones es $\{(x, y) / y = 2x - 7\}$.

Graficando el conjunto de soluciones obtenemos una recta: la representación gráfica de la función: $y = 2x - 7$.

Ejemplo 5.8: Resolver la ecuación: $2x + 3y = x + y + 2(y + 5)$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{aligned}
 2x + 3y &= x + y + 2y + 10 \\
 2x + 3y &= x + 3y + 10 \\
 x + 0y &= 10
 \end{aligned}$$

Los pares $(10, 0)$, $(10, 1)$, $(10, -\sqrt{3})$, $(10, -2)$ y en general los pares de la forma $(10, a)$ son solución de la ecuación. Graficando el conjunto de soluciones obtenemos nuevamente una recta, pero en este caso es paralela al eje “y” y pasa por el punto $(10, 0)$.

Ejemplo 5.9: Es evidente que la ecuación $0x + 0y = 3$ carece de soluciones. Es “**incompatible**”.

Ejemplo 5.10: La ecuación $0x + 0y = 0$ se satisface cualquiera sea el par (x,y) .

En general el conjunto de soluciones de una ecuación de la forma: $ax + by = c$ con a y b números reales no simultáneamente nulos es siempre una recta del plano.

Esto sigue de notar que, si $b \neq 0$, entonces la ecuación $ax + by = c$ puede escribirse (sin alterar su conjunto de soluciones) en la forma:

$$y = \frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Además, si $b = 0$, entonces $a \neq 0$ y la ecuación puede escribirse en la forma:

$$x = \frac{c}{a}$$

la que es una recta del plano, paralelo al eje “y” y que cruza por el punto $(c/a, 0)$.

5.2. Sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Consideremos el sistema de dos ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Un par (x,y) es solución de este sistema si verifica simultáneamente las 2 ecuaciones.

Ejemplo 5.11: Por ejemplo, consideremos el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 4y = -3 \end{cases}$$

Vemos que $(1, -1)$ es solución del sistema pues

$$2(1) - 3(-1) = 5$$

$$1 + 4(-1) = -3$$

Pero $(4,1)$ no es solución del sistema

$$2(4) - 3(1) = 5$$

$$4 + 4(1) = 8 \neq -3$$

Antes de estudiar un procedimiento general para resolver tales sistemas daremos ejemplos de sistemas cuyas soluciones son “evidentes”.

Ejemplo 5.12: Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 0y = 2 \\ 0x + y = -5 \end{cases}$$

Observamos que admite únicamente la solución $(2, -5)$.

Ejemplo 5.13: Observemos con cuidado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x + 0y = -5 \end{cases}$$

La segunda ecuación carece de soluciones, por lo tanto, el sistema también carece de soluciones. Decimos que es “incompatible”.

Ejemplo 5.14: Sea el sistema

$$\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

La 2° ecuación se verifica trivialmente cualquiera sea el par (x,y). Por consiguiente, toda solución de la 1° ecuación es solución del sistema.

Ejemplo 5.15: Finalmente, observemos este sistema:

$$\begin{cases} 3x + 0y = 1 \\ 0x - 4y = 2 \end{cases}$$

tiene las mismas soluciones que el sistema

$$\begin{cases} x = 1/3 \\ y = -1/2 \end{cases}$$

cuya única solución es (1/3; -1/2).

El procedimiento para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas consistirá esencialmente en pasar del sistema dado a otro, que tenga las mismas soluciones que el 1° pero en el cual las soluciones (o la falta de ellas) se pongan en evidencia.

Sistemas que tienen el mismo conjunto de soluciones se denominan **sistemas equivalentes**.

Ejemplo 5.16: Resolver el sistema:

$$\text{I} \begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

Todo par (x,y) que sea solución del sistema I es también solución de la ecuación:

$$(2x + 5y) + (3x - 5y) = 9 + 1$$

(que se obtiene “sumando” las dos ecuaciones de I), que equivale a la ecuación:

$$5x + 0y = 10$$

Por lo tanto, toda solución del sistema I es también solución del sistema

$$\text{II} \begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 5x + 0y = 10 \end{cases}$$

Pero también del sistema

$$\text{III} \begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ x + 0y = 2 \end{cases}$$

Observe que la segunda ecuación del sistema II es equivalente a multiplicar por 5 la segunda ecuación del sistema III:

$$5(x + 0y) = 5 \cdot 2$$

Restando esta ecuación con la primera del sistema III obtenemos:

$$5(x + 0y) - (2x + 5y) = 10 - 9$$

$$5x - 2x - 5y = 1$$

$$3x - 5y = 1$$

que es la 2° ecuación de I. Por lo tanto, toda solución del sistema III es también solución del sistema II y del sistema I. Es decir, I, II y III son sistemas equivalentes. Todos esos sistemas tienen exactamente el **mismo conjunto de soluciones**, pero el II y el III presentan la ventaja de que en su 2° ecuación aparece solamente una incógnita (decimos que se ha “eliminado” la incógnita “y”).

En forma análoga, construiremos ahora, a partir de II, un sistema en cuya primera ecuación aparezca eliminada la incógnita “x”. Para ello reemplazamos la 1° ecuación de II por la que se obtiene de sumarle la 2° multiplicada por -2, o sea:

$$0x + 5y = 5$$

o equivalentemente

$$0x + y = 1$$

Se tiene así el sistema:

$$\text{IV} \begin{cases} 0x + y = 1 \\ x + 0y = 2 \end{cases}$$

equivalente al sistema II (y por lo tanto al I), pero que pone en evidencia su única solución, que es el par (2,1).

Observación

El sistema II muestra que sólo puede ser soluciones aquellos pares (x,y) en los cuales se tenga $x = 2$. Teniendo en cuenta esta condición, la primera ecuación del sistema II permite obtener de inmediato el valor de “y”.

Ejemplo 5.17: Resolver el sistema:

$$\text{I} \begin{cases} 3x + 5y = 6 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

Reemplazando la 2° ecuación de I por la que se obtiene sumándole la 1° multiplicada por $-2/3$, resulta el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 6 \\ 0x + 2/3y = 1 \end{cases}$$

o, equivalentemente:

$$\text{II} \begin{cases} 3x + 5y = 6 \\ 0x + y = 3/2 \end{cases}$$

Reemplazando la 1° ecuación de II por la que se obtiene sumándole la 2° multiplicada por -5 se obtiene:

$$\text{II} \begin{cases} 3x + 0y = -3/2 \\ 0x + y = 3/2 \end{cases}$$

o, equivalentemente:

$$\text{III} \begin{cases} x + 0y = -1/2 \\ 0x + y = 3/2 \end{cases}$$

Un razonamiento similar al efectuado en el ejemplo anterior nos convencerá que los sistemas I, II y III son equivalentes y tienen a $\{(-1/2; 3/2)\}$ por conjunto de soluciones.

Ejemplo 5.18: Resolver el sistema.

$$\text{I} \begin{cases} 9x - 6y = 3 \\ 12x - 8y = 3 \end{cases}$$

Reemplazando la 2° ecuación de I por la que se obtiene de sumarle la 1° multiplicada por $-4/3$ se obtiene el sistema.

$$\text{II} \begin{cases} 9x - 6 = 3 \\ 0x + 0y = -1 \end{cases}$$

Toda solución del sistema I es solución del II, pero vemos que este carece de soluciones; luego el sistema I también carece de soluciones.

Ejemplo 5.19: Resolver el sistema.

$$\text{I} \begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 4x - 10y = 14 \end{cases}$$

Reemplazando la 2° ecuación por la que resulta de sumarle la 1° multiplicada por (-2) se obtiene el sistema:

$$\text{II} \begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

equivalente al sistema I.

La 2° ecuación de este último sistema se verifica trivialmente cualquiera sea el par (x, y) y por consiguiente el conjunto de soluciones del sistema planteado es $\left\{ (x, y) / y = -\frac{7}{5} + \frac{2}{5}x \right\}$.

Observando que la 2° ecuación de I es la 1° multiplicada por 2 podríamos haber deducido de inmediato que ambas ecuaciones tienen exactamente el mismo conjunto de soluciones.

En los ejemplos y ejercicios hemos visto que un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas puede tener:

- a) una única solución.
- b) ninguna solución.
- c) infinitas soluciones.

Nos preguntamos ¿son estos los únicos tipos de resultados que podemos obtener? Es fácil ver que realmente es así. En efecto, sea el sistema.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

Si a y b no son nulos simultáneamente, lo mismo que a_1 y b_1 , hemos visto que el conjunto de soluciones de cada ecuación puede pensarse como una recta en el plano. Por consiguiente, el problema de resolver un sistema de este tipo es equivalente al problema de encontrar la intersección de 2 rectas en el plano.

La geometría elemental nos enseña que 2 rectas en el plano pueden:

- a) cortarse en único punto; esto es, el sistema tiene solución única.
- b) ser paralelas; el sistema carece de soluciones.
- c) ser coincidentes, en cuyo caso el sistema tiene infinitas soluciones.

5.3. Ecuación de 2° grado con una incógnita.

5.3.1. Resolución de la ecuación de 2° grado con una incógnita.

Una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ se llama ecuación de 2° grado con una incógnita.

Ejemplo 5.20: Resolver la ecuación $x^2 - 9 = 0$.

Escribir $x^2 - 9 = 0$ es equivalente a escribir $x^2 = 9$.

Es inmediato que esta última ecuación se satisface si $x = 3$ o $x = -3$; por lo que $\{-3; 3\}$ es el conjunto de soluciones de la ecuación de 2° grado planteada.

Ejemplo 5.21: Sea la ecuación $4x^2 + 10 = 0$.

Para todo número real “ x ” el número $4x^2 + 10$ es positivo, por lo tanto la ecuación planteada carece de solución real.

Ejemplo 5.22: Resolver $5x^2 - 2x = 0$.

Para todo número “ x ” resulta $5x^2 - 2x = x(5x - 2) = 0$ y recordando que el producto de dos números es “0” si y sólo si alguno de los factores es “0” podemos decir que:

$$5x^2 - 2x = 0 \text{ si y sólo si } x = 0 \text{ o } 5x - 2 = 0.$$

Por consiguiente las soluciones de la ecuación planteada son los números 0 y $2/5$.

Ejemplo 5.23: Resolver $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Empleamos el método de completar cuadrados:

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + \textcolor{red}{9} - \textcolor{red}{9} + 5 = (x^2 - 6x + 9) - \textcolor{red}{9} + 5 = (x - 3)^2 - 4$$

Escribimos la ecuación dada en la forma $(x - 3)^2 - 4 = 0$, equivalente a $(x - 3)^2 = 4$. De aquí se observa que $x - 3$ debe ser tal que elevado al cuadrado dé como resultado 4:

$$x - 3 = 2 \quad \text{o} \quad x - 3 = -2$$

y de allí que $x = 5$ y $x = 1$ son las soluciones de la ecuación.

Ejemplo 5.24: Encontrar el conjunto de soluciones de la ecuación $5x^2 + 10x + 5 = 0$

En este caso, procedemos como sigue:

$$5x^2 + 10x + 5 = 0$$

$$5x^2 + 10x + 5 = 5(x^2 + 2x + 1) = 5(x + 1)^2$$

Por consiguiente, resolver la ecuación $5x^2 + 10x + 5 = 0$ es equivalente a encontrar los números “ x ” tales que $(x + 1)^2 = 0$. Pero $(x + 1)^2 = 0$ sí y solo si $x + 1 = 0$. Luego el conjunto de soluciones de la ecuación planteada es $\{-1\}$.

Ejemplo 5.25: Resolver la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$

Completamos cuadrados

$$x^2 + x + 1 = \left(x^2 + x + \textcolor{red}{\frac{1}{4}}\right) + 1 - \textcolor{red}{\frac{1}{4}} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Para todo número real “ x ” el número $(x + 1)^2 + \frac{3}{4}$ es positivo. Por consiguiente, la ecuación no tiene solución (real).

La técnica de completar los cuadrados nos sirve también para encontrar una “fórmula” para resolver la ecuación de 2º grado. Al estudiar la parábola vimos que si $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

Las soluciones de la ecuación planteada son las soluciones de la ecuación

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

que podemos escribir:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$4a^2$ es un número positivo. Por consiguiente el signo de $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ depende del signo del número $(b^2 - 4ac)$ llamado el **discriminante** de la ecuación.

Distinguimos 3 casos:

1º) $b^2 - 4ac > 0$

Resulta: $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ o bien $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y por consiguiente, tanto

$x = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ como $x = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ son soluciones de la ecuación dada.

$$2^\circ) b^2 - 4ac = 0$$

Resulta $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ que se satisface si y sólo si $x + \frac{b}{2a} = 0$ y de allí que la **única** solución de la ecuación sea el número $\frac{-b}{2a}$.

$$3^\circ) b^2 - 4ac < 0$$

No existe ningún número real cuyo cuadrado sea un número negativo. Por consiguiente, la ecuación planteada carece de soluciones reales.

5.3.2. Reconstrucción de la ecuación de 2° grado conocidas sus raíces.

Nos planteamos el siguiente problema: dados dos números α y β , queremos ver si es posible encontrar una ecuación de 2° grado cuyas soluciones sean exactamente esos dos números.

El problema de encontrar una ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ que cumple la condición impuesta es equivalente al problema de encontrar un polinomio de 2° grado

$$F = ax^2 + bx + c \quad [5.1]$$

y tal que $F(\alpha) = 0$ y $F(\beta) = 0$.

Recordemos que el polinomio $(x - \alpha)(x - \beta)$ verifica la condición

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

Comparado con [5.1] identificamos que los coeficientes son:

$$a = 1 \quad b = -(\alpha + \beta) \quad c = \alpha\beta$$

por consiguiente, la ecuación pedida será:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha\beta) = 0$$

Observación

Si k es cualquier número real distinto de “0” la ecuación

$$kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k(\alpha\beta) = 0$$

tiene las mismas raíces que la anterior y por consiguiente es una solución del problema planteado.

Aplicación

Encontrar dos números α y β conocida su suma $s = \alpha + \beta$ y su producto $p = \alpha\beta$.

De acuerdo a las consideraciones anteriores, los números pedidos serán las soluciones de la ecuación:

$$x^2 - sx + p = 0$$

Ejemplo 5.25: Encontrar dos números cuyo producto sea 2 y cuya suma sea 3. Si existen tales números serán soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Primeramente, completamos cuadrados en la ecuación dada:

$$x^2 - 3x + 2 = \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 2 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

de donde

$$x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \text{ o bien } x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

es decir que las soluciones serán $x = 2$ y $x = 1$. Los números pedidos son 1 y 2.

5.4. Sistemas mixtos. Método de sustitución.

Consideremos un sistema mixto formado por 2 ecuaciones con 2 incógnitas, una ecuación de 1° grado y la otra de 2° grado.

Un método general para resolver sistemas de este tipo consiste en despejar el valor de una de las incógnitas en la ecuación de 1° grado y reemplazar dicho valor de una de las incógnitas en la ecuación de 2° grado, que queda entonces con una sola incógnita.

Por ejemplo, encontrar los pares (x, y) que verifican el sistema

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$7x - y = 25$$

Despejando y de la ecuación de 1° grado

$$y = -25 + 7x$$

Reemplazando este valor en la ecuación de 2° grado

$$x^2 + (-25 + 7x)^2 = 25$$

$$x^2 + 25^2 - 350x + 49x^2 - 25$$

$$50x^2 - 350x + 600 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = x^2 - 7x + \frac{49}{4} + 12 - \frac{49}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$x - \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = 3$$

luego

$$y = -25 + 7 \cdot 4 = 3 \quad \text{o bien} \quad y = -25 + 7 \cdot 3 = -4$$

Las soluciones son los pares $(3, 4)$ y $(3, -4)$.

Ejercitación del Capítulo 5

Ejercicio 5.1) Resolver las siguientes ecuaciones. Verificar la solución encontrada.

a) $6x + 6 = 2x - 2$

b) $\frac{x}{2} - \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}x = 6$

c) $\frac{x}{x^2 + 4} = \frac{4}{x^2 + 4}$

d) $2 + \frac{1}{x^4 + 2} = 2 + \frac{1}{x^4 + 2}$

e) $\frac{x+2}{2} - \frac{x-1}{4} = \frac{x+3}{8}$

f) $(x-2)(x-3) = (x-5)(x-4)$

g) $\frac{x+3}{2x} + \frac{5}{x-1} = \frac{1}{2}$

h) $\frac{x+2}{x+2} = \frac{x-4}{x+4}$

i) $\frac{3x+1}{x+2} = \frac{3x-2}{x+1}$

j) $\frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{16}{x^2 - 9}$

Ejercicio 5.2) Representar gráficamente el conjunto de soluciones de la ecuación $4x + 2y - 8 = 0$.

Ejercicio 5.3) Resolver analítica y gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x + 4y = 4 \end{cases}$

Ejercicio 5.4) Resolver analíticamente los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 0x + 3y = 6 \\ 2x = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 6y - 6x = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5y = 3 - 2x \\ 3x = 2y + 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 15y = 7 \\ x - 5y = -2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{x-2}{3} + \frac{y+1}{6} = 2 \\ \frac{x+3}{4} - \frac{2y-1}{2} = 1 \end{cases}$

Ejercicio 5.5) ¿Para qué valores de a el siguiente sistema tiene soluciones distintas de la solución $(0,0)$?

$$\begin{cases} ax + 8y = 0 \\ ax - 9y = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 5.6) Determinar para qué valores de a y b el sistema siguiente posee:

a) una única solución; b) infinitas soluciones; c) ninguna solución.

$$\begin{cases} a^2x + ay + 1 = 0 \\ b^2x + by + 1 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 5.7) Resuelva cada uno de los siguientes sistemas, en caso de ser posible:

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 6x + 10y = 22 \end{cases}$ R:Indeterminado

b) $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 6x + 10y = 21 \end{cases}$ R:Incompatible

c) $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$ R:(2;1)

Ejercicio 5.8) Resuelva los siguientes sistemas para x e y:

a) $\begin{cases} 3x^2 + 5y^2 = 17 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ R:(2;1), (14/23;-41/23)

b) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3y = 8 \\ 2x^2 - 5y^2 + 2y = 15 \end{cases}$ R:(3;1), (-3;1), ($\sqrt{619}/9$;-1/9), ($-\sqrt{619}/9$;-1/9)

Ejercicio 5.9) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 3x = 0$	b) $2x^2 - 8 = 0$	c) $3x^2 + 27 = 0$
d) $(x + 4)(x - 2) = 0$	e) $4x^2 = 0$	f) $x^2 - 5x + 6 = 0$
g) $x^2 - 4x + 4 = 0$	h) $x^2 - 6x + 25 = 0$	i) $\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} = \frac{x + 4}{x + 1}$
j) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} = \frac{8}{3}$	k) $\frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x - 2} = 1$	l) $\sqrt{2x + 1} = \sqrt{x} + 1$

Ejercicio 5.10) Determinar los valores de b para que la ecuación: $x^2 + bx + 4 = 0$

- a) tenga dos soluciones reales.
- b) tenga una única solución real.
- c) carezca de soluciones reales.

Ejercicio 5.11) ¿Para qué valores de a la siguiente ecuación carece de solución real?

$$(a - 1)x^2 - 2(a + 2)x + (a - 4) = 0$$

Ejercicio 5.12) Encontrar una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean los números:

- a) 3; -2
- b) -4; 2/3
- c) -3/4; 5/6

Ejercicio 5.13) Si la suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es 10 y su producto 15 ¿Cuál es la ecuación?

Ejercicio 5.14) Determine k de tal modo que las dos soluciones de las ecuaciones siguientes sean iguales.

a) $x^2 + kx + 2k = 0$

b) $x^2 + 2(k - 2)x - 8k = 0$

Ejercicio 5.15) Encuentre el valor de k para que la suma de las soluciones sea igual al producto de las mismas en las ecuaciones siguientes.

a) $2x^2 + (k - 3)x + 3k - 5 = 0$

b) $3x^2 + (k + 2)x + 2k + 1 = 0$

Ejercicio 5.16) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} xy = -2 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy = 20 \\ -3 = 2x - y \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 14 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 13 \\ 2x^2 - y^2 = 17 \end{cases}$

Ejercicio 5.17) Encontrar los puntos de intersección de la recta $y = -2x + 1$ con la parábola $y = x^2 + 5x + 1$.

Problemas

Para resolver problemas planteados con palabras puede considerar las siguientes sugerencias:

- 1) Lea con mucho cuidado el problema, de manera que sepa exactamente lo que dice y lo que pregunta.
- 2) Haga un dibujo o un cuadro que resuma la información dada.
- 3) Identifique la cantidad desconocida y asígnele una letra. Asegúrese de que representa un número (por ejemplo, kilómetros, litros, o tiempo).
- 4) Observe las condiciones o restricciones que pone el problema sobre la incógnita. Transfórmela en una ecuación.
- 5) Resuelva la ecuación. El resultado es un número específico. La incógnita es ahora un valor conocido.
- 6) De la conclusión en palabras.
- 7) Analice si su respuesta es razonable.

Ejercicio 5.18) Los grados Celsius (C) y los Fahrenheit (F), están relacionados por la siguiente fórmula $C = 5/9 (F - 32)$.

- a) ¿Qué temperatura en grados Fahrenheit corresponde a 30 grados Celsius?
- b) ¿Qué temperatura hay (en grados Fahrenheit) si un termómetro en grados Celsius da la misma lectura que un termómetro en grados Fahrenheit?
- c) ¿Qué temperatura hay (en grados Celsius) si la temperatura dada en grados Celsius es la mitad de la temperatura dada en grados Fahrenheit?

Ejercicio 5.19) A las 14:00 h, Carlos salió de la ciudad de Córdoba, hacia el sur a 45 km/h. Una hora más tarde Raúl salió detrás de él a 60 km/h. ¿Cuándo alcanzará Raúl a Carlos?

Ejercicio 5.20) ¿Cuántos litros de una solución de ácido nítrico al 60% deben añadirse a 10 litros de una solución al 30% para obtener una solución al 50%?

Ejercicio 5.21) Un tanque contiene 1000 litros de salmuera al 30%. Si se evapora por ebullición parte del agua de la solución, se incrementa el porcentaje de sal, ¿Qué cantidad de agua debe evaporarse para obtener una solución al 35%?

Ejercicio 5.22) Un alambre de 130 cm de largo está doblado en forma de un rectángulo que tiene 3 cm más de largo que de ancho. Encuéntrese el ancho del rectángulo.

Ejercicio 5.23) Diofanto vivió un sexto de su vida como niño, una doceava parte de su vida como joven y una séptima parte de vida como adulto soltero. Un hijo nació 5 años después del matrimonio de Diofanto, pero este hijo murió 4 años antes de su padre. Diofanto vivió el doble que su hijo. Calcúlese la edad que tenía Diofanto cuando murió.

Ejercicio 5.24) Encuéntrese dos números cuya suma sea $\frac{1}{3}$ y cuya diferencia sea 3.

Ejercicio 5.25) En un corral con aves y conejos hay 23 cabezas y 60 patas. ¿Cuántas aves y cuántos conejos hay?

Ejercicio 5.26) Una solución al 40% de alcohol debe mezclarse con una al 90% para obtener 50 litros al 50%. ¿Cuántos litros de cada solución deben utilizarse?

Ejercicio 5.27) Un rectángulo tiene un perímetro de 26 cm y un área de 30 cm^2 . Encuéntrense sus dimensiones.

Ejercicio 5.28) Un alambre de 40 cm de longitud se cortó en dos pedazos. Una de las partes se dobló haciendo un cuadrado y la otra un rectángulo que es tres veces más largo que ancho. La suma del área del cuadrado y del área del rectángulo es de $55 \frac{3}{4} \text{ cm}^2$. ¿En qué lugar se cortó el alambre?

Ejercicio 5.29) En un juego de basquetbol se obtuvieron ganancias netas de \$ 45,80 al vender recuerdos y refrescos, los que les costaron \$0,08 por unidad. Si vendieron 480 recuerdos y 610 refrescos, ¿cuál fue el precio de la venta de cada uno si el precio combinado de un recuerdo y un refresco fue de \$ 0,25?

R: refrescos = \$ 0,10, recuerdos = \$ 0,15.

Ejercicio 5.30) Las entradas para una fiesta de estudiantes costaron \$ 8 por personas y \$ 15 por pareja. Si a la fiesta asistieron 144 personas y se recaudaron \$ 1.098 por venta de entradas. ¿Cuántas parejas y cuantas personas solas asistieron a la fiesta?

R: parejas = 54, solos = 36.

Ejercicio 5.31) Un triángulo tiene un perímetro de 54 cm. Calcule las longitudes de los tres lados si el lado más largo es el doble del más corto y el otro es 6 cm más largo que el más corto.

R: 12, 18, 24.

Ejercicio 5.32) Tres ciudades forman un triángulo. La distancia de la ciudad A a la B es de 6 km más que la distancia de la ciudad B a la C. La distancia de la ciudad A a la C es 6 km menos que la distancia de la ciudad B a la C. Calcule la distancia de la ciudad A a la C si la distancia de la ciudad A a la B más la distancia de la ciudad B a la C es de 50 km.

Ejercicio 5.33) El punto (3; 9) está sobre la parábola $y = x^2$. Para toda m , la recta $y - 9 = m(x - 3)$ pasa por el punto (3; 9). Halle el valor de m tal que la recta y la parábola se intercepten exactamente en un punto. Sugerencia: recuerde que $ax^2 + bx + c = 0$ tiene exactamente una solución si y solo si $b^2 - 4ac = 0$.

R: $m=6$

Ejercicio 5.34) Halle dos números positivos cuya diferencia sea 1 y cuyo producto sea 56.

R: 8, 7.

Ejercicio 5.35) Encuentre dos números tales que la suma de sus cuadrados sea igual a 113 y la diferencia de sus cuadrados sea igual a 15.

R: 8, 7, -8, -7.

Capítulo 6: Trigonometría

Objetivos

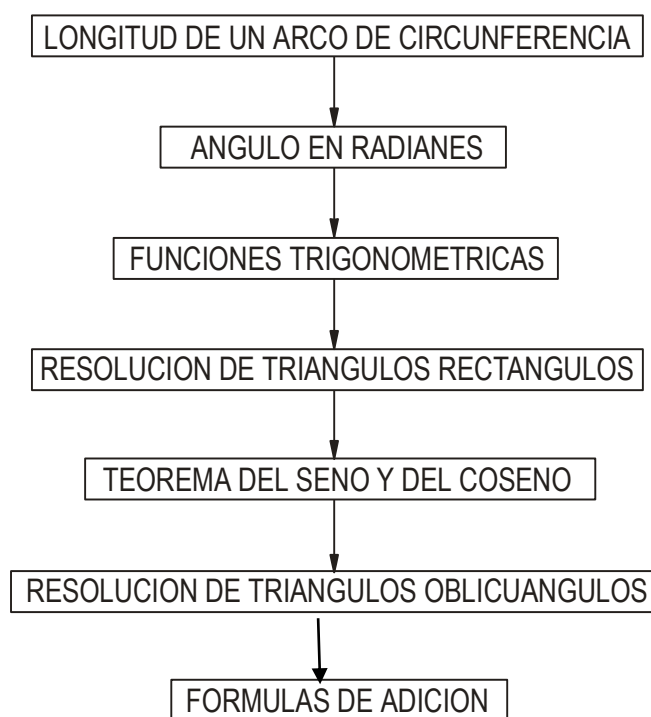
Al finalizar esta unidad usted deberá ser capaz de:

- **Comprender el concepto de ángulo y su medición.**
- **Comprender el concepto de función trigonométrica.**
- **Definir y graficar las funciones trigonométricas.**
- **Resolver triángulos rectángulos.**
- **Comprender los teoremas del seno y del coseno.**
- **Resolver triángulos oblicuángulos.**
- **Comprender las fórmulas de adición.**

Contenidos

- 6.1 Longitud de un arco de circunferencia. Ángulos y su medición (grados, radianes).
- 6.2 Funciones trigonométricas. Relaciones fundamentales.
- 6.3 Seno, coseno y tangente de los ángulos notables.
- 6.4 Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos.

Esquema conceptual



Introducción.

En esta unidad se considera la longitud de un arco de circunferencia. El concepto de ángulo y su medición en grados sexagesimales y en radianes. El concepto de función trigonométrica y la definición y estudio de las funciones trigonométricas. La resolución de triángulos rectángulos. Los teoremas del seno y del coseno y su aplicación en la resolución de triángulos oblicuángulos. Las fórmulas de adición.

Orientación del aprendizaje

Lea la introducción teórica de cada tema y desarrolle personalmente los ejemplos que le siguen. Realice la ejercitación correspondiente.

Bibliografía de la Unidad

- Englebert, S., Pedemonti, S., Semino, S., “Matemática 3”. AZ editorial.
- Tapia, N., Bibiloni, A., Tapia, C., “Matemática 3”. Editorial Estrada.

6.1.1. Longitud de un arco de circunferencia.

Dados dos puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) del plano, el teorema de Pitágoras nos da una fórmula para calcular la longitud del segmento que los une, esta es: $\ell = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

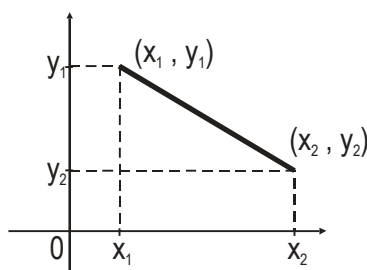


Figura 6.1. Teorema de Pitágoras

Supongamos ahora que queremos calcular la longitud de la semicircunferencia de radio uno (figura 6.2):

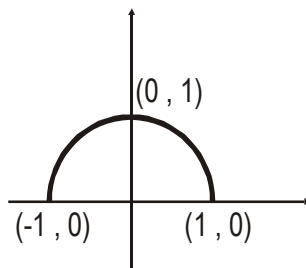


Figura 6.2. Teorema de Pitágoras

La longitud del segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$ (extremos de la semicircunferencia) es 2. Podemos tomar este valor como una primera aproximación a la longitud del arco.

Una mejor aproximación se obtiene si sumamos las longitudes de los segmentos entre $(1,0)$ y $(0,1)$ y entre $(0,1)$ y $(-1,0)$ y en este caso el valor $2\sqrt{2} = 2,8284$. Gráficamente, lo vemos en la figura 6.3:

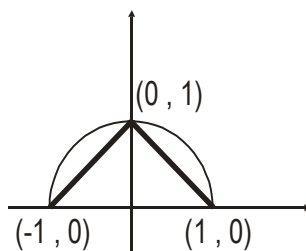


Figura 6.3. Aproximación a la longitud del arco

Es una mejor aproximación, pero todavía difieren en mucho. Pero si ahora subdividimos y calculamos la suma de las longitudes de los segmentos como en la figura 6.4, obtenemos el valor 3,0614.

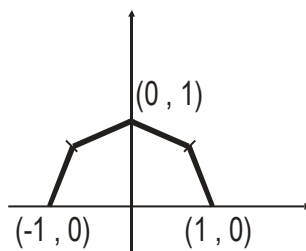


Figura 6.4. Otra aproximación a la longitud del arco

Entonces, subdividimos una vez más, obtenemos como resultado 3,1214.

Finalmente, notemos que subdividiendo en 16 segmentos de igual longitud se obtiene 3,1362 y con 32 segmentos el resultado 3,1407.

Si seguimos subdividiendo así, podemos calcular con tanta precisión como nos haga falta la longitud de la semicircunferencia unidad, cuyo valor correcto es un número real que se lo representa con la letra griega π .

Nota: Quizá podría mencionarse que las aproximaciones son siempre por defecto, es decir, el valor calculado es menor que el exacto.

6.1.2. Ángulos y su medición.

Dar un ángulo consiste en dar un par de semirrectas con el mismo origen P : una l_1 que llamamos inicial y otra l_2 a la que llamaremos final (ver figura 6.5).

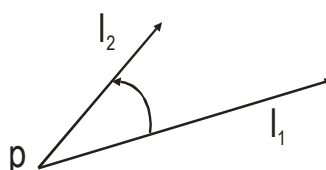


Figura 6.5. Ángulo entre dos semirrectas

Para medir un ángulo como el dado, procedemos de la siguiente manera: introducimos en el plano un par de ejes cartesianos ortogonales de tal manera que el origen de coordenadas sea P y l_1 coincida con el eje positivo de las abscisas (figura 6.6).

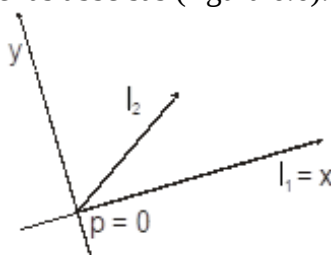


Figura 6.6. Procedimiento para medir un ángulo

En tal sistema de coordenadas consideramos la circunferencia unidad, esto es, la circunferencia de centro “0” y radio “1”. Entonces l_2 corta a la circunferencia unidad en un punto Q .

Se llama medida en radianes del ángulo dado a la longitud del arco de la circunferencia unidad que une el punto $(1,0)$ con Q en el sentido antihorario.

En la figura 6.7 sería el arco “más corto” pero es fácil imaginar una figura donde sea el “más largo”.

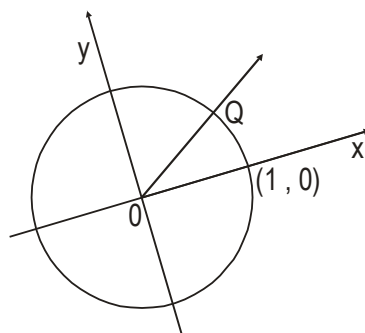


Figura 6.7. Definición de un ángulo

Es también muy usada la medida en grados sexagesimal de un ángulo. Esta se obtiene definiendo que un ángulo de 1 grado sexagesimal es aquél de $2\pi/360$ radianes. En fórmulas:

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ radianes}$$

Se define 1 minuto sexagesimal como $(1/60)^\circ$ y se escribe:

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$$

Finalmente, se usa definir 1 segundo sexagesimal como la sesentava parte de un minuto sexagesimal, lo que también escribimos:

$$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$$

En este sentido entonces, un ángulo que tiene a $3^\circ 12' 36''$ por medida sexagesimal, corresponde a un ángulo de:

$$3\left(\frac{2\pi}{360}\right) + (12)\left(\frac{2\pi}{360}\right)\left(\frac{1}{60}\right) + (36)\left(\frac{2\pi}{360}\right)\left(\frac{1}{3600}\right) = 2\pi\left(\frac{321}{36000}\right) \text{ radianes}$$

Análogamente, un ángulo de $\pi/4$ radianes es un ángulo que tiene 45° por medida sexagesimal.

A veces es conveniente pensar a un ángulo de t radianes (con $t > 0$) como el ángulo que tiene por semirrecta inicial al eje positivo de las abscisas y por semirrecta final la semirrecta por el origen y por el punto de circunferencia unidad al cual arribamos si “caminamos” sobre la circunferencia una distancia t a partir del punto $(1,0)$ en el sentido antihorario.

De esta manera vemos que $t > 0$ no tiene por qué ser menor que 2π . Podemos entonces pensar, por ejemplo, en un ángulo de $5\pi/2$ radianes como un ángulo de $\pi/2$ radianes.

Para pensar correspondientemente en un ángulo de t radianes con $t < 0$ seguimos tomando al eje positivo de las abscisas como semirrecta inicial y como semirrecta final la que empieza en el origen y pasa por el punto de la circunferencia unidad al cual arribamos caminando una distancia t a partir del punto $(1,0)$ pero **en el sentido horario**. Por ejemplo, pensamos en un ángulo de $-\pi/2$ radianes como en uno de $3\pi/2$ radianes.

Finalmente digamos que cuando se habla de un ángulo de 450° , uno piensa en un ángulo de $(450 - 362)^\circ = 90^\circ$.

6.2. Funciones trigonométricas. Relaciones fundamentales.

Dado un número real t representamos, como en la sección anterior, un ángulo de t radianes en un sistema de coordenadas cartesianas. Sea Q el punto de intersección de la semirrecta final de dicho ángulo con la circunferencia unidad (de radio unitario). Las coordenadas x o y de Q dependen del ángulo t (figura 6.8). Llamaremos **coseno de t** a la primera coordenada y **seno de t** a la segunda coordenada; escribimos:

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}$$

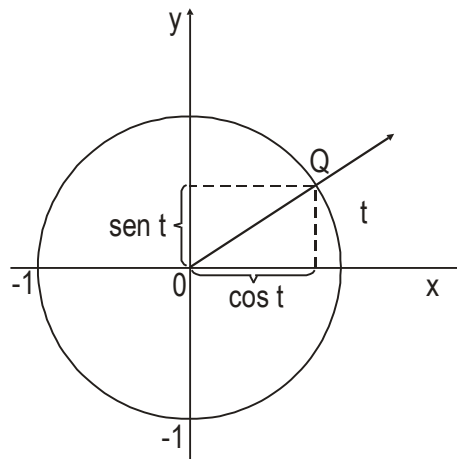


Figura 6.8. Definición de seno y coseno de un ángulo

6.2.1. Funciones Seno y Coseno

El **coseno de t** es la abscisa del punto Q, el **seno de t** es la ordenada del punto Q. Entonces, las funciones:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto \cos t$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto \text{sen } t$$

se llaman, respectivamente, “coseno” y “seno”.

Es consecuencia inmediata de las definiciones de coseno y seno, que **para todo número real t** se verifica:

$$(\text{sen } t)^2 + (\cos t)^2 = 1$$

Esta ecuación se suele llamar **relación trigonométrica fundamental**. Se suele escribir

$$(\text{sen } t)^2 = \text{sen}^2 t$$

$$(\cos t)^2 = \cos^2 t$$

Con esta notación la fórmula anterior se escribe: $\boxed{\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1}$

Algunas observaciones importantes:

$$\text{sen}(t + 2\pi) = \text{sen } t$$

$$\cos(t + 2\pi) = \cos t$$

Los valores de seno y coseno no pueden ser mayores que 1 ni menores que -1. Esto es:

$$-1 \leq \text{sen } t \leq 1$$

$$-1 \leq \cos t \leq 1$$

De la simple observación de la figura 6.8 resulta:

- si t crece desde 0 hasta $\pi/2$

$\text{sen } t$ crece de 0 a 1; mientras que $\cos t$ decrece de 1 a 0.

- si t crece desde $\pi/2$ hasta π

$\text{sen } t$ decrece de 1 a 0; mientras que $\cos t$ decrece de 0 a -1.

Y podemos continuar así. Obtenemos la representación gráfica de la función seno y de función coseno, tal como se observa en las figuras 6.9 y 6.10, respectivamente.

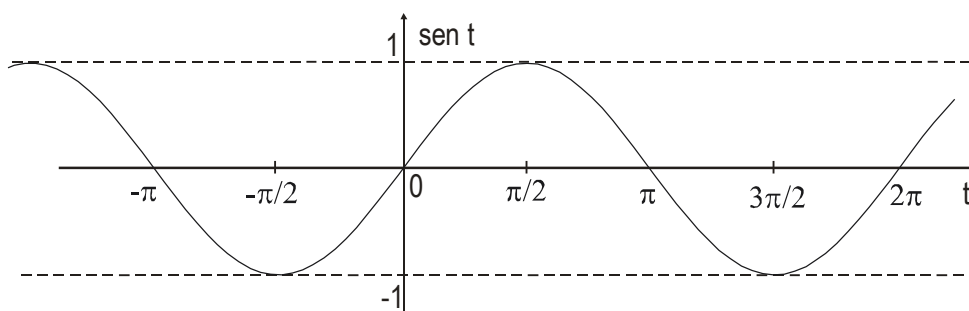


Figura 6.9. Representación gráfica de la función seno

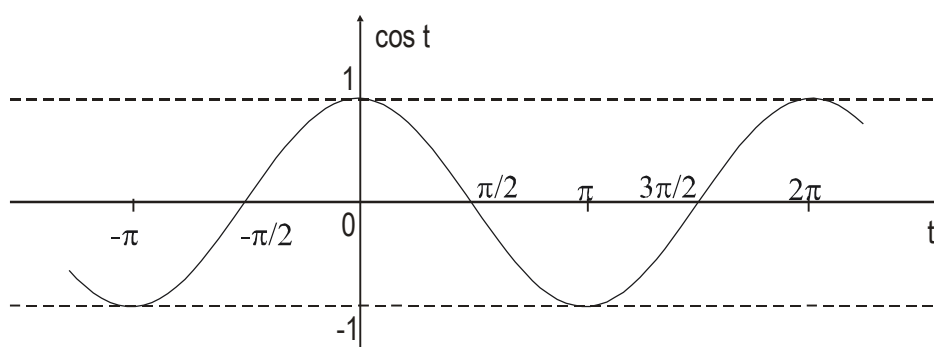


Figura 6.10. Representación gráfica de la función coseno

Por último, estudiaremos una función trigonométrica más.

6.2.2. Función Tangente

La función tangente, que denotamos tg , se define como: $tg(t) = \frac{\text{sen}(t)}{\text{cos}(t)}$

Observemos que su dominio es el conjunto de los números reales excepto los múltiplos enteros impares de $\frac{\pi}{2}$, esto es, excepto... $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ porque en esos valores, el denominador, que es el coseno, se anula en los mismos ($\text{cos}(t) = 0$) y la división entre cero NO EXISTE. Para tener idea de su representación gráfica hacemos las siguientes observaciones, en la figura 6.11:

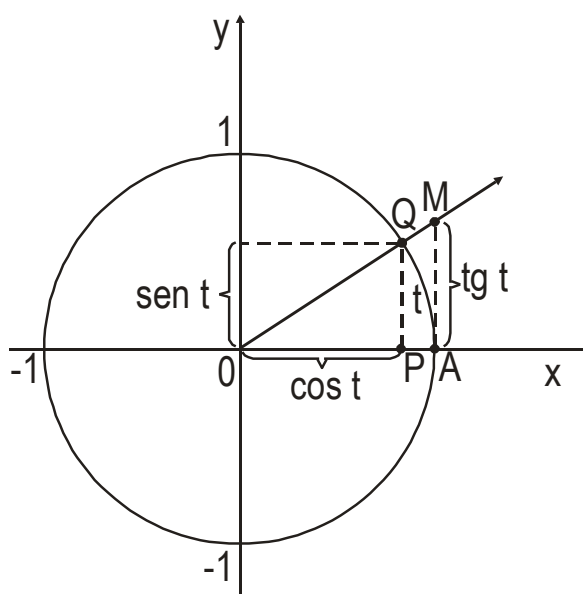


Figura 6.11. Deducción de la función tangente

Notación: Con $|AB|$ denotaremos la longitud del segmento de extremos A y B. Los triángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle OAM$ son semejantes ; por lo tanto:

$$\frac{|AM|}{|OA|} = \frac{|PQ|}{|OP|}$$

Puesto que: $|OA|=1$; $|OP|=\cos t$; $|PQ|=\sin t$ resulta: $\frac{|AM|}{1} = \frac{\sin t}{\cos t}$ es decir que: $|AM| = \tan t$ o sea que la longitud del segmento de extremos A y M es el valor de la función tangente para el número real t . Analizando la variación de $|AM|$ según la variación de t se deduce que la representación gráfica de la función tangente es de la forma (figura 6.12):

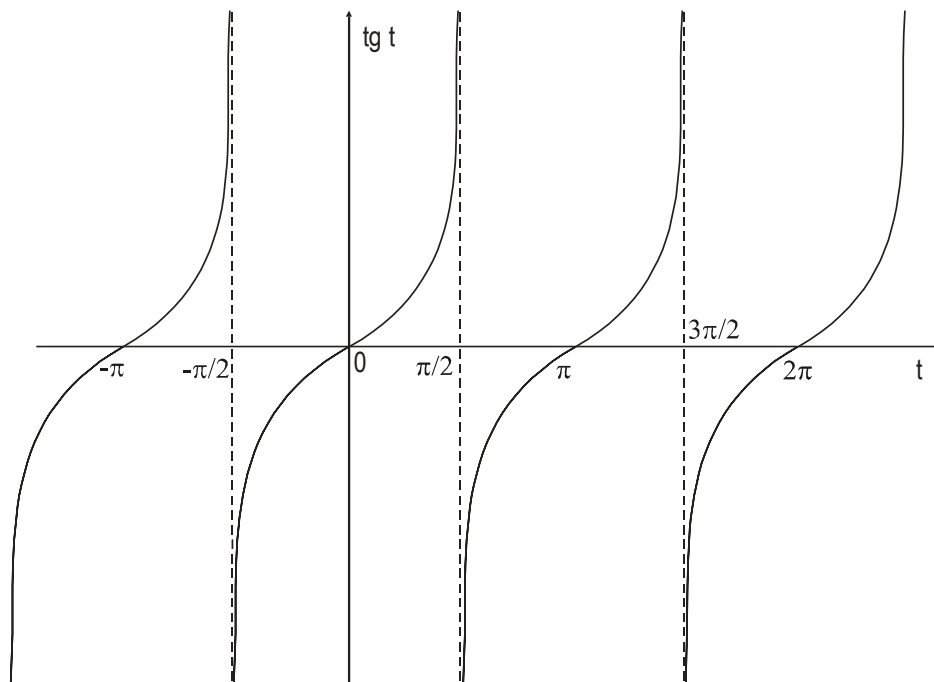


Figura 6.12. Representación gráfica de la función tangente

Estudiando la figura 6.13 se ve que $\cos(t+\pi) = -\cos(t)$ y $\sin(t+\pi) = -\sin(t)$ de donde sigue que $\tan(t+\pi) = \tan(t)$, esto es, la tangente es una función periódica de período π , información que hemos usado para su gráfica.

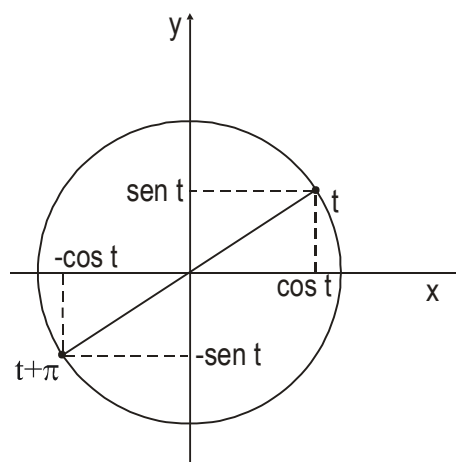


Figura 6.13. Periodicidad de la función tangente

6.4. Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos.

Mirando la figura 6.14, se ve que los triángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle OMN$ son semejantes.

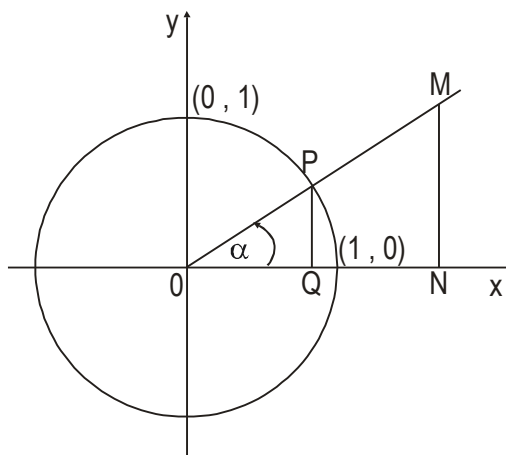


Figura 6.14. Triángulos semejantes

Dados dos puntos A y B del plano, denotemos con $|AB|$ la longitud del segmento comprendido entre ellos. Entonces, por semejanza, tenemos que

$$\cos \alpha = \frac{|OQ|}{|OP|} = \frac{|ON|}{|OM|}$$

$$\sin \alpha = \frac{|PQ|}{|OP|} = \frac{|MN|}{|OM|}$$

A estos dos hechos los expresamos diciendo que, en un triángulo rectángulo, el coseno de uno de los ángulos (no recto) es el cociente entre las longitudes del cateto adyacente al ángulo en cuestión y la hipotenusa, y el seno es el cociente entre las longitudes del cateto opuesto y la hipotenusa.

Además, teniendo en cuenta que: $\operatorname{tg}(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}$ resulta que la tangente de un ángulo es el

cociente entre las longitudes del cateto opuesto y el cateto adyacente.

Como aplicación calcularemos los valores de las funciones trigonométricas para algunos ángulos especiales (ángulos notables): 30° , 45° y 60° , puesto que sus valores de seno y coseno son sencillos de recordar. Ellos se obtienen de la figura 6.15:

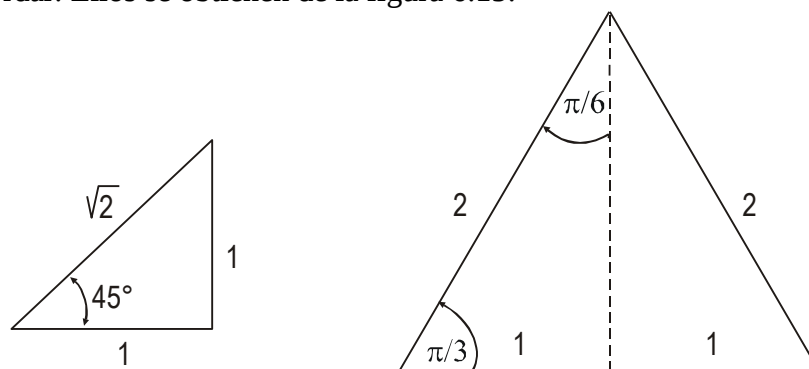


Figura 6.15. Triángulos con ángulos notables

Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

Ángulo	0°	30°	45°	60°	90°
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Este cuadro es de gran importancia, sugerimos estudiarlo de memoria (**no sólo para el ingreso sino para las materias de matemática de primer año**).

Nota para memorizar: observar que todos los valores de estas funciones trigonométricas de ángulos notables se pueden obtener a partir de la función seno (coseno tiene los valores en orden inverso). Y para recordar los valores, podemos hacer $\text{sen}(t) = \frac{\sqrt{n}}{2}$ con $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Así, obtenemos: $\text{sen}(0) = \frac{\sqrt{0}}{2} = \frac{0}{2} = 0$, $\text{sen}(30^\circ) = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$, $\text{sen}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, etc.

Otra aplicación es que, conociendo el valor de una de las funciones trigonométricas de un ángulo, podemos calcular las demás. Así, si se conoce $\text{sen}(\alpha)$, la figura 6.16 permite “leer” el valor de las restantes funciones:

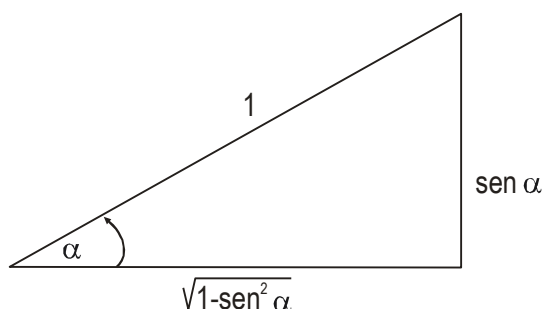


Figura 6.16. Triángulos con seno de un ángulo conocido

$$\text{Resulta } \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(\alpha)}, \quad \text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\alpha)}}$$

Análogamente, si se conoce $\text{tg}(\alpha)$, de la figura 6.17 se obtiene que: $\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{tg}(\alpha)}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\alpha)}}$ y

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\alpha)}}$$

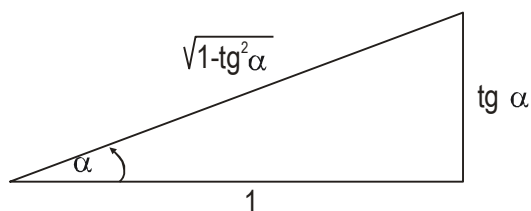


Figura 6.17. Triángulos con tangente de un ángulo conocido

Supongamos ahora dado un triángulo como el de la figura 6.18:

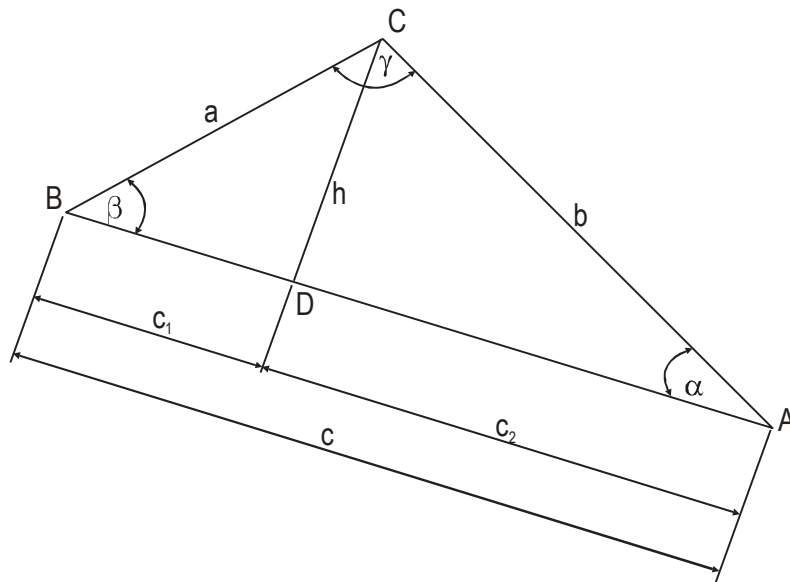


Figura 6.18. Triángulo arbitrario

El triángulo $\triangle ABC$ no necesariamente es rectángulo, pero sí lo son $\triangle BCD$ y $\triangle ACD$. Digamos que:

$$h = |CD|, \quad a = |BC|, \quad b = |AC|,$$

$$c = |AB|, \quad c_1 = |BD|, \quad c_2 = |AD|$$

Entonces:

$$b^2 = h^2 + c_2^2 = h^2 + (c - c_1)^2 = h^2 + c_1^2 + c^2 - 2cc_1$$

Pero $h^2 + c_1^2 = a^2$ y $c_1 / a = \cos \beta$. Luego:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta}$$

Fórmula que, junto a sus correspondientes para “ a^2 ” y “ c^2 ” se las conoce con el nombre de **teorema del coseno** y que es una importante generalización del teorema de Pitágoras a triángulos no rectángulos.

Para finalizar esta sección digamos que en la figura 6.18 se tiene

$$\sin \alpha = \frac{h}{b} \quad \sin \beta = \frac{h}{a}$$

de donde sigue que:

$$b \sin \alpha = h = a \sin \beta$$

y de aquí que:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$$

Como α y β eran arbitrarios, sigue que en cualquier triángulo

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$$

Fórmula que se conoce con el nombre de **teorema del seno**.

Ejercitación del Capítulo 6

Ejercicio 6.1) Expresar en radianes la medida de cada uno de los siguientes ángulos.

- a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) 135° f) 180°

Ejercicio 6.2) Expresar en grados sexagesimales la medida de cada uno de los siguientes ángulos:

- a) $\pi/6$ b) $\pi/3$ c) $\pi/2$ d) $\pi/4$ e) π f) 2π

Ejercicio 6.3) Calcular los valores de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ para:

- a) $\theta = 0$ b) $\theta = \pi/6$ c) $\theta = \pi/3$ d) $\theta = \pi/2$ e) $\theta = \pi$ f) $\theta = 2\pi$
g) $\theta = -\pi/4$ h) $\theta = -\pi/6$

Ejercicio 6.4) Dar todos los ángulos entre 0 y 2π tales que:

- a) $\sin(\theta) = -\sqrt{2}/2$ b) $\cos(\theta) = \sqrt{3}/2$ c) $\cos(\theta) = -1$
d) $\tan(\theta) = -\sqrt{3}$ e) $\sin(\theta) = 0$ f) $\sin(\theta) = -1$

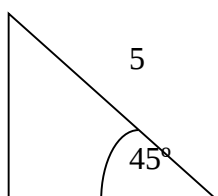
Ejercicio 6.5) Determinar el signo de $\cos(\theta)$, de $\sin(\theta)$ y de $\tan(\theta)$ para:

- a) $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ b) $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
c) $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ d) $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

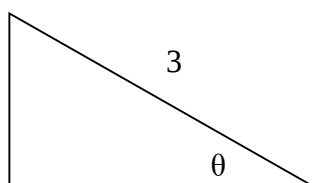
Ejercicio 6.6). Sea $\theta \in [0, \pi/2]$, entonces:

- a) si $\sin(\theta) = 1/2$, calcular $\cos(\theta)$ y $\tan(\theta)$
b) si $\cos(\theta) = 1/2$, calcular $\sin(\theta)$ y $\tan(\theta)$
c) si $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calcular $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$

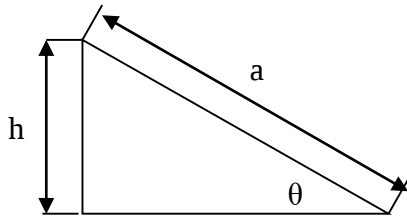
Ejercicio 6.7) Calcular el área del triángulo rectángulo de la siguiente figura



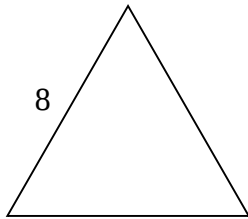
Ejercicio 6.8) Calcular el área, el perímetro y los ángulos interiores del triángulo rectángulo de la siguiente figura sabiendo que $\theta = 30^\circ$.



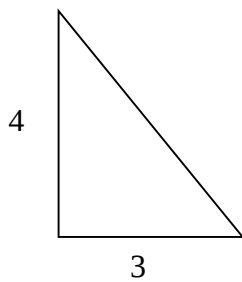
Ejercicio 6.9) En el triángulo rectángulo de la figura calcular h y a , sabiendo que $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



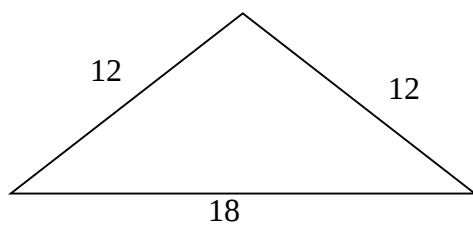
Ejercicio 6.10) Calcular el área del triángulo equilátero.



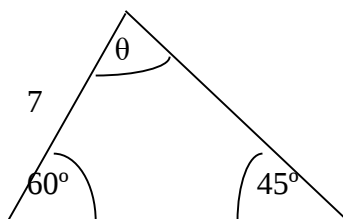
Ejercicio 6.11) Calcular la hipotenusa y los ángulos interiores del siguiente triángulo rectángulo.



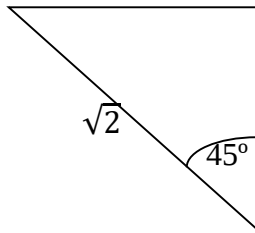
Ejercicio 6.12) Calcular el área del triángulo de la siguiente figura.



Ejercicio 6.13) En el triángulo de la siguiente figura, calcular los otros dos lados y el ángulo θ .



Ejercicio 6.14) Calcular el perímetro del triángulo rectángulo de la figura.



Ejercicio 6.15) Calcular h.

